الإحصاء فى مجال الأعمال

Business Statistic

تأليف

أ.د. على السيد عبده الديب   أ.د. محمد عبد المنعم جودة حزين

قسم التأمين والعلوم الإكتوارية

كلية التجارة – جامعة القاهرة

٢٠١٨–٢٠١٩



بسم الله الرحمن الرحيم

(لقد أحصاهم وعدهم عدا)

صدق الله العظيم (مريم ٩٤)

بسم الله الرحمن الرحيم

(ربنا لا تؤاخذنا إن نسينا أو أخطأنا)

صدق الله العظيم (البقرة من الآية ٢٨٦)



مقدمة

يعتمد التطور الإقتصادى على تطويع النظريات العلمية وقابليتها للتطبيق وترشيد القرارات الإدارية. ويرتكز ذلك فى جميع الأحوال على ضرورة توافر قاعدة بيانات يمكن الاسترشاد بنتائج تحليلها فى تحديد اتجاه الظاهرة – أو الظواهر – محل الدراسة.

وتحتل العلوم الرياضية والإحصائية مكان الصدارة فى مجال جمع وتحليل وعرض البيانات وصولاً إلى نتائج تهيىء لمتخذ القرارات أن يحدد – وبدرجة دقة معينة – اتجاهات الظواهر والعلاقات التداخلية بينها.

وتأسيساً على ذلك فقد أسهمت العلوم الرياضية والإحصائية فى تطوير العلوم التطبيقية والإنسانية ، الأمر الذى وضعها فى مقدمة اهتمامات الدراسات التجارية لتأهيل وصقل قدرات طلاب التجارة وإعدادهم لقيادة دفة الحياة الاقتصادية.

ومن ثم فقد حرص المؤلفان على أن يجمع هذا الكتاب بين دفتيه مجموعة من الموضوعات الأساسية تم عرضها وتسلسلها بأسلوب سهل يمكن فهمه واستيعابه.

ويحتوى هذا المرجع على دراسة متكاملة لأساسيات علمى الإحصاء الوصفى والإحصاء التحليلى ، وتمت هذه الدراسة فى ستة أبواب مختلفة ، يختص الباب الأول منها بدراسة مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات) ، ويختص الباب الثانى بدراسة مقاييس التشتت ، ويختص الباب الثالث بدراسة الارتباط والانحدار ، وتخص هذه الموضوعات علم الإحصاء الوصفى ، كما يختص الباب الرابع بدراسة التوزيعات الاحتمالية ، ويختص الباب الخامس بدراسة نظرية العينات والتقدير ، ويعتبر البابان الرابع والخامس هما عصب علم الإحصاء التحليلى ، ويعتبر الباب السادس وهو الأرقام القياسية هو عصب علم الإحصاء التطبيقى.

ونأمل بهذا المرجع أن يكون فيه إضافة لمكتبة الإحصاء الغنية بالكثير من المراجع العلمية الهامة ، وأن يكون فى هذا المرجع دعم وإضافة للباحثين فى مختلف مجالات البحث العلمى.

والله ولى التوفيق ،،،

المؤلفان



الباب الأول
مقاييس النزعة المركزية
(المتوسطات)

ويحتوى على :

الفصل الأول : الوسط الحسابى

الفصل الثانى : الوسيط

الفصل الثالث : المنوال

الفصل الرابع : متوسط الإنحرافات المطلقة



الباب الأول

مقاييس النزعة المركزية

Measures of central tendency

مقدمة:

إن تجميع البيانات وتبويبها مع كونها تعتبر المرحلة الأولى والأساسية في الدراسات الإحصائية ومعالجتها وتهذيبها وتنقيتها إجراءات حتمية وضرورية حتى يمكن استخدامها والاستفادة منها.

واستعرضنا في الفصول السابقة كيفية عرض البيانات في صورة بيانية يسهل قراءة اتجاهات الظواهر منها والوصول إلى إمكانية استخدامها في القرارات الإدارية.

غير أنه يجب أن يكون معلوماً أن عملية جمع البيانات لا تتوقف عند الحصول عليها واستخدامها وتوظيفها في الدراسات الإحصائية المختلفة. ولكنها عملية متكررة ومتجددة ومستمرة، ويرجع ذلك إلى اختلاف البيانات من فترة لأخرى نتيجة لمجموعة من العوامل والمتغيرات. وغير خافٍ أن الظواهر التى نخضعها للدراسة تختلف باختلاف الظروف الاجتماعية والاقتصادية، بجانب ما يمكن أن تحدثه التطورات العلمية والاكتشافات الحديثة.

ولعل مستوى الأجور أو الدخول في منتصف القرن الماضى تختلف اختلافاً واضحاً عن مستوى الأجور أو الدخول في السنوات الاخيرة. فإذا كان الأجر اليومي لأحد العاملين جنيه واحد عام ١٩٧٠ وربما كان هذا الأجر مناسباً مع مستوى الأسعار ويكفي لتغطية احتياجاته فإنه يصعب الاعتماد عليه عام ٢٠١٨، وهكذا.. نجد أن الحصول على مسكن عام ١٩٧٠ ربما يكلف مائة جنيه أو نحو ذلك فهو لا يقارن اطلاقاً بتكلفة الحصول على مسكن عام ٢٠١٨ مثلاً.

نخلص من ذلك ان الدراسات الإحصائية تحتاج إلى استمرارية جمع البيانات وتبويبها وعرضها تمهيداً لتحليلها باستخدام المؤشرات والأساليب الرياضية وصولاً إلى نتائج يمكن الاعتماد عليها والاسترشاد بها في اتخاذ القرارات الإدارية التى تناسب المرحلة.

وتأسيساً على ذلك فإن عرض البيانات في صورة رسوم وأشكال بيانية قد لا تحقق الهدف واستخدامها في جميع المراحل، ويرجع ذلك إلى مجموعة من العوامل أهمها إمكانية تداخل المتغيرات وتشابكها مما يمكن أن يحدث تأثيراً واضحاً في اتجاهات الظواهر. ومن ثم فإننا نحتاج إلى تحديث البيانات وتحليلها وصولاً إلى نتائج استخدام المؤشرات الإحصائية.

وتعتبر المقاييس الإحصائية والمتوسطات أسلوباً يهتم بتحديد القيمة المتوسطة والتى تتجمع حولها قيم الظاهرة ونستخلص منها مدى تقارب أو تباعد القيم عن هذه القيمة المتوسطة وهو ما يطلق عليه النزعة المركزية.

وقد استقرت مقاييس النزعة المركزية أو المتوسطات كمؤشرات ترتكز عليها غالبية الدراسات، غير انه يجب توافر مجموعة من الأسس في المؤشر موضوع الدراسة، ومن أهمها:

أ - إمكانية تحديده رياضياً وبأسلوب علمى.

ب- يجب أن يكون للمؤشر خصائص مميزة.

جـ- يجب أن تتناول دراسة المؤشر المرغوب في استخدامه جميع مفردات الظاهرة.

د - بالرغم من تناول الدراسة جميع المفردات فإنه يجب أن لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

وعموماً فإن الدراسة فى هذا المجال تتضمن مجموعة من المؤشرات، تم التعارف عليها بمقاييس النزعة المركزية ومن أهمها:

١- الوسط الحسابي Arithmetic Mean

٢- الوسيط Median

٣- المنوال Mode

٤- الوسط الهندسي Geometric Mean

وننوه إلى أن دراسة هذه المؤشرات واستخدامها يجب أن يتناول تطبيق كل منها البيانات الإحصائية المبوبة وغير المبوبة.

الفصل الأول

الوســط الحســابي
Arithmetic Mean

يعتبر الوسط الحسابي احد المقاييس الإحصائية التي يمكن الاعتماد عليها لمعرفة اتجاه الظاهرة موضوع الدراسة ؛ وقد تزايد استخدام الوسط الحسابي للوصول إلى مؤشر إحصائي من البيانات المتاحة سواء كانت في صورة مفردات أو تم تجميعها في صورة جداول تكرارية ، مع مراعاة أن تحديد الوسط الحسابي في حالة التوزيعات التكرارية لا يتأثر بانتظام التوزيع أو اختلاف أطوال الفئات .

أولا : في حالة المفردات :

يمكن تحديد الوسط الحسابي لمجموعة من المفردات بتحديد مجموع المفردات ثم قسمة المجموع على عدد المفردات وعلى ذلك فإن المعادلة تكون على الصورة التالية :

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع المفردات}}{\text{عدد المفردات}}$$

مثال (١) :

فيما يلي الأجر اليومي لمجموعة من العاملين بالجنيه :

١٨ ، ٣٥ ، ٢٢ ، ١٧ ، ٥٣

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي للأجر .

الحــــل

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع المفردات}}{\text{عدد المفردات}}$$

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{١٨+٣٥+٢٢+١٧+٥٣}{٥}$$

$$= \frac{١٤٥}{٥} = ٢٩ \text{ جنيها}$$

يتضح من المثال السابق أن تحديد الوسط الحسابي لا يحتاج إلى ترتيب المفردات تصاعديا أو تنازلياً كما أنه سهل الحصول على النتائج .

ويمكن استخدام الرموز للوصول إلى الوسط الحسابي وتبسيط المعادلات؛ فإذا رمزنا لمجموعة المفردات بالرمز (س) فإن المجموع نرمز له بالرمز (مجـ) وبذلك يكون مجموع (س) من المفردات هو (مجـ س)، ونرمز لعدد المفردات بالرمز (ن) .

وغير خاف أن قيمة المفردات تكون كما يلي :

$س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، $س_4$، $س_5$، ... ، ... ، ... ، $س_ن$

فإذا رمزنا للوسط الحسابي بالرمز ($س^/$) فإن المعادلة تأخذ الصورة التالية:

$$\overline{س} = \frac{مجـ\ س}{ن}$$

مثال (٢) :

فيما يلي بيان بالمبيعات اليومية لأحد محلات التجزئة خلال فترة معينة (القيمة بالألف جنيه):

١٦ ، ٩، ١٤ ، ٢١ ، ١٢ ، ١٨ ، ١٥

والمطلوب : تحديد الوسط الحسابي للمبيعات .

الحـــل

فإذا رمزنا للوسط الحسابي بالرمز ($\overline{س}$) فإن المعادلة تأخذ الصورة التالية:

$$\overline{س} = \frac{مجـ\ س}{ن}$$

$$\overline{س} = \frac{١٦ + ٩ + ١٤ + ٢١ + ١٢ + ١٨ + ١٥}{٧} = \frac{١٠٥}{٧} = ١٥ \text{ ألف جنيه}$$

يلاحظ أن قيمة المفردات يمكن أن تكون كبيرة مما قد يؤدي إلى صعوبة الجمع وبالتالي تزايد احتمالات الخطأ في الحساب والوصول إلى نتائج غير مرغوب فيها . ولذلك يمكن تبسيط العمليات الحسابية باستخدام طرق وسيطة منها طريقة الانحرافات البسيطة ، وطريقة الانحرافات المختصرة .

١/١ طريقة الانحرافات البسيطة :

تعتمد هذه الطريقة على اختيار أي رقم من بين المفردات (س) واعتباره وسط فرضى نرمز له بالرمز (أ)، ثم نقوم بطرح الوسط الفرضي (أ) الذي تم تحديده من قيمة (س) نحصل على انحرافات المفردات عن الوسط الفرضي ونرمز لهذه الانحرافات بالرمز ($ح_س$) وتسمى الانحرافات البسيطة .

ويجب عند اختيار الوسط الفرضي (أ) أن نختار قيمة تتوسط المفردات من حيث القيمة وليس العدد حتى يؤدي طرح هذه القيمة إلى وجود مجموعة انحرافات بإشارة موجبة ومجموعة أخرى بإشارة سالبة ثم نوجد مجموع هذه الانحرافات ونرمز للمجموع بالرمز (مجـ $ح_س$) وبذلك يمكن إيجاد الوسط الحسابي للإنحرافات ثم يضاف الوسط الفرضي السابق طرحه للوصول إلى الوسط الحسابي المطلوب ، وتأخذ المعادلة الصورة التالية :

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ح س}}{ن} + أ$$

مثال (٣) :

فيما يلي بيان بالأرباح السنوية لمجموعة من الشركات (القيمة بالألف جنيه):

٥٨٠ ، ٦٧٠ ، ٤٥٠ ، ٧٠٠ ، ٥٥٠

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي .

الحـــل

الطريقة المباشـرة :

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{ن}$$

$$\bar{س} = \frac{٥٨٠ + ٦٧٠ + ٤٥٠ + ٧٠٠ + ٥٥٠}{٥} = ٥٩٠ \text{ ألف جنيه}$$

طريقة الانحرافات البسيطة :

نختار وسط فرضي (أ) يتوسط القيم للمفردات ويراعي أن أكبر قيمة هي (٧٠٠) وأصغر قيمة هي (٤٥٠) وباختيار القيمة (٥٨٠) مثلا على أنها وسط فرضي (أ) فإن الحل يكون كما يلي:

س	$ح_س$ = س – أ
٥٨٠	٠
٦٧٠	٩٠
٤٥٠	١٣٠-
٧٠٠	١٢٠
٥٥٠	٣٠-
مجموع	٥٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ح س}}{\text{ن}} + \text{أ}$$

$$\bar{س} = \frac{٥٠}{٥} + ٥٨٠ = ٥٩٠ \text{ ألف جنيه}$$

ملاحظـات :

- يتم اختيار وسط فرضي (أ) من بين قيم المفردات وليس هناك أي شروط لاختيـار رقم معين ، بغض النظر عن ترتيبه بين المفردات .
- إن اختيار أكبر قيمة أو أصـغر قيمـة لا يـؤدي إلـى خطـأ النتيجـة ولكن يترتـب عليـه أن تكون قيم الانحرافات موجبه أو سالبة وبقيم كبيرة نسبيا .
- إن اختيار قيمة تتوسط القيم يؤدي إلـى تصـغير قيم الانحرافات الموجبـة والسـالبة ممـا يترتب عليه سهولة الحساب .
- يلاحظ أن قيمة الوسط الحسـابي لا تختلف بـاختلاف الطريقـة المسـتخدمة وقد توصـلنا على نفس النتيجة .
- يلاحظ أن مجموع انحرافات المفردات عن الوسط الحسابي يسـاوى صـفر ، فـي حين أن مجموع انحرافات المفردات عن الوسط الفرضـي لا يسـاوى صـفرا ، غيـر أن ذلـك يمكـن أن يحـدث مصـادفة إذا كـان الوسـط الفرضـي الـذي تـم اختيـاره يسـاوى الوسـط الحسابي للمفردات وتأكيدا لذلك نجد أن :

س	س – $\bar{س}$
٥٨٠	١٠-
٦٧٠	٨٠+
٤٥٠	١٤٠-
٧٠٠	١١٠+
٥٥٠	٤٠-
مجموع	١٩٠-١٩٠=٠

- في الجدول السابق طرحنا قيمة الوسط الحسابي ($\bar{س}$ = ٥٩٠) من جميع قيم س لنحصل على انحرافات المفردات عن وسطها الحسابي ، ثم جمعنا الانحرافات الموجبة والسالبة للتأكد من أن مجموع الانحرافات يساوي صفرا.

حـل آخـر

بفرض أ = ٤٥٠ فإنه يمكن حل المثال كما يلي :

س	$ح_س$ = س – أ
٥٨٠	١٣٠
٦٧٠	٢٢٠
٤٥٠	٠
٧٠٠	٢٥٠
٥٥٠	١٠٠
مجموع	٧٠٠

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ ح_س}{ن} + أ$$

$$\bar{س} = \frac{٧٠٠}{٥} + ٥٨٠ = ٥٩٠ \text{ ألف جنيه}$$

٢/١ طريقة الانحرافات المختصرة :

تعتمد طريقة الانحرافات المختصرة على قسمة جميع المفردات على مقدار ثابت – يفضل أن تكون جميع المفردات تقبل القسمة عليه – ونرمز للمقدار الثابت بالرمز (ث) ، ثم نحصل على الانحرافات المختصرة ونرمز لها بالرمز ($ح_س$) . وبإيجاد مجموع الانحرافات المختصرة وقسمتها على عدد المفردات (ن) نحصل على الوسط الحسابي للانحرافات المختصرة ، ثم يضرب هذا الوسط في قيمة المقدار الثابت (ث) نحصل على الوسط الحسابي المطلوب وتأخذ المعادلة الصورة التالية :

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ ح\ س}{ن} \times ث$$

مثال (٤) :

أوجد الوسط الحسابي في المثال السابق باستخدام طريقة الانحرافات المختصرة .

الحــل

س	$ح_س = \frac{س}{ث}$
٥٨٠	٥٨
٦٧٠	٦٧
٤٥٠	٤٥
٧٠٠	٧٠
٥٥٠	٥٥
مجموع	٢٩٥

ث = ١٠ ن = ٥

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ ح\ س}{ن} \times ث$$

$$\bar{س} = \frac{٢٩٥}{٥} \times ١٠ = ٥٩٠ \text{ ألف جنيه}$$

٣/١ <u>طريقة الانحرافات المختزلة :</u>

يمكن إدماج الطريقتين السابقتين (البسيطة والمختصرة) معا وصولا إلي طريقة الانحرافات المختزلة . بمعني أننا نقوم باختيار وسط فرضي (أ) من بين المفردات ، وبطرح الوسط الفرضي (أ) نحصل على الانحرافات البسيطة ($ح_س$) ثم نقسم الانحرافات البسيطة على مقدار ثابت (ث) لنحصل على الانحرافات المختزلة .

وبإيجاد الوسط الحسابي للانحرافات المختزلة ثم ضربه في المقدار الثابت وجمع الوسط الفرضي نحصل على الوسط الحسابي المطلوب . وتأخذ المعادلة الصورة التالية :

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ ح\ س}{ن} \times ث + أ$$

مثال (٥) :

احسب الوسط الحسابي للمفردات في المثال الأسبق باستخدام طريقة الانحرافات المختزلة .

الحـل

س	$ح_س$ = س - أ	$ح_س = \frac{س}{ث}$
(٥٨٠)	٠	٠
٦٧٠	٩٠	٩
٤٥٠	-١٣٠	-١٣
٧٠٠	١٢٠	١٢
٥٥٠	-٣٠	-٣
مجموع	---	٥

أ = ٥٨٠   ث = ١٠   ن = ٥

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ ح\ س}{ن} \times ث + أ$$

$$\bar{س} = \frac{٥}{٥} \times ١٠ + ٥٨٠ = ٥٩٠ \text{ ألف جنيه}$$

ثانيا : إيجاد الوسط الحسابى فى حالة التوزيعات :

يمكن أن تكون البيانات مبوبة في صورة توزيعات تكرارية بسيطة (فئات وتكرارات)، وقد تكون الفئات متساوية أو غير متساوية ، بمعني أن التوزيع التكراري قد يكون منتظما أو غير منتظم .

ويراعي أن إيجاد الوسط الحسابي في حالة التوزيعات التكرارية لا يتأثر بنوع التوزيع ، ويعتمد أساسا على تحديد مراكز الفئات . فإذا رمزنا للفئات بالرمز (ف) والتكرارات بالرمز (ك) فإننا نرمز لمركز الفئة بالرمز (س) ، حيث :

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدني للفئة + الحد الأعلي}}{٢}$$

أو

$$\text{مركز الفئة} = \text{الحد الأدني للفئة} + \frac{1}{2}\ \text{طول الفئة}$$

١/٢ الطريقة المباشرة :

- نحصل على مراكز الفئات (س) .
- نضرب التكرارات (ك) في مراكز الفئات (س) نحصل على (ك س) ثم نوجد مجموعها ونرمز له بالرمز (مجـ ك س).
- نوجد الوسط الحسابي (س/) بقسمة (مجـ ك س) على (مجـ ك) .

مثـال (٦) :

فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات مصروفات الدعاية والإعلان (القيمة بالألف جنيه):

فئات	٦٠-	٨٠-	١٠٠-	١٢٠-	١٤٠-	١٦٠-	١٨٠-
تكرارات	٣٥	٦٥	٩٠	٥٠	٣٠	٢٠	١٠

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي لمصروفات الدعاية والإعلان

الحـل

ف	ك	س	ك س
٦٠-	٣٥	٧٠	٢٤٥٠
٨٠-	٦٥	٩٠	٥٨٥٠
١٠٠-	٩٠	١١٠	٩٩٠٠
١٢٠-	٥٠	١٣٠	٦٥٠٠
١٤٠-	٣٠	١٥٠	٤٥٠٠
١٦٠-	٢٠	١٧٠	٣٤٠٠
١٨٠-٢٠٠	١٠	١٩٠	١٩٠٠
مجموع	٣٠٠	---	٣٤٥٠٠

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}$$

$$\bar{س} = \frac{٣٤٥٠٠}{٣٠٠} = ١١٥ \text{ ألف جنيه}$$

٢/٣ طريقة الانحرافات البسيطة :

يمكن استخدام الانحرافات البسيطة باختيار وسط فرضى من مراكز الفئات ثم ضرب الانحرافات البسيطة في التكرارات ، والحصول على المجموع وتكون المعادلة على النحو التالي :

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}} + أ$$

ف	ك	س	ح س	ك $ح_{س}$
٦٠-	٣٥	٧٠	٤٠-	١٤٠٠-
٨٠-	٦٥	٩٠	٢٠-	١٣٠٠-
١٠٠-	٩٠	(١١٠)	٠	٠
١٢٠-	٥٠	١٣٠	٢٠	١٠٠٠
١٤٠-	٣٠	١٥٠	٤٠	١٢٠٠
١٦٠-	٢٠	١٧٠	٦٠	١٢٠٠
١٨٠-٢٠٠	١٠	١٩٠	٨٠	٨٠٠
	٣٠٠			١٥٠٠

أ = ١١٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}} + أ$$

$$\bar{س} = \frac{١٥٠٠}{٣٠٠} + ١١٠ = ١١٥ \text{ ألف جنيه}$$

٣/٢ طريقة الانحرافات المختزلة :

يمكن اتباع طريقة الانحرافات المختزلة بقسمة الانحرافات البسيطة على مقدار ثابت (ث) ، ثم ضرب الانحرافات المختزلة في التكرارات والحصول على المجموع (مجـ ك حس). وتأخذ المعادلة الشكل التالي :

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ك ح س}}{\text{مجـ ك}} \times \text{ث} + \text{أ}$$

ويكون حل المثال على النحو التالي :

ف	ك	س	ح س	$ح_س$	$ك_س ح_س$
٦٠-	٣٥	٧٠	-٤٠	-٢	-٧٠
٨٠-	٦٥	٩٠	-٢٠	-١	-٦٥
١٠٠-	٩٠	(١١٠)	٠	٠	٠
١٢٠-	٥٠	١٣٠	٢٠	١	٥٠
١٤٠-	٣٠	١٥٠	٤٠	٢	٦٠
١٦٠-	٢٠	١٧٠	٦٠	٣	٦٠
١٨٠-٢٠٠	١٠	١٩٠	٨٠	٤	٤٠
مجموع	٣٠٠				٧٥

أ = ١١٠ ث = ٢٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ك ح س}}{\text{مجـ ك}} \times \text{ث} + \text{أ}$$

$$\bar{س} = \frac{٧٥}{٣٠٠} \times ٢٠ + ١١٠ = ١١٥ \text{ ألف جنيه}$$

مثال (٧) :

قامت شركة النهضة للصناعات الغذائية بتوزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات الأجر الشهري بالجنيه كما يلي :

فئات	١٠٠-	١٢٠-	١٤٠-	١٧٠-	٢٠٠-	٢٤٠-	مجموع
عددالعاملين	٨٠	٢٢٠	٢٧٠	١٥٠	٦٠	٢٠	٨٠٠

والمطلوب إيجاد الوسط الحساب للأجر .

الحـل

الطريقة المباشـرة :

ف	ك	س	ك س
١٠٠-	٨٠	١١٠	٨٨٠٠
١٢٠-	٢٢٠	١٣٠	٢٨٦٠٠
١٤٠-	٢٧٠	١٥٥	٤١٨٥٠
١٧٠-	١٥٠	١٨٥	٢٧٧٥٠
٢٠٠-	٦٠	٢٢٠	١٣٢٠٠
٢٤٠-٢٦٠	٢٠	٢٥٠	٥٠٠٠
مجموع	٨٠٠		١٢٥٢٠٠

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}} = \frac{١٢٥٠٠}{٨٠٠}$$

= ١٥٦,٥ جنيها

طريقة الانحرافات البسيطة :

ف	ك	س	ح س	ك حس
١٠٠-	٨٠	١١٠	٤٥-	٣٦٠٠-
١٢٠-	٢٢٠	١٣٠	٢٥-	٥٥٠٠-
١٤٠-	٢٧٠	(١٥٥)	٠	٠
١٧٠-	١٥٠	١٨٥	٣٠	٤٥٠٠
٢٠٠-	٦٠	٢٢٠	٦٥	٣٩٠٠
٢٤٠-٢٦٠	٢٠	٢٥٠	٩٥	١٩٠٠
مجموع	٨٠٠			١٢٠٠

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}$$

$$\text{س} = \frac{١٢٠٠}{٨٠٠} + ١٥٥ = ١٥٦,٥ \text{ جنيه}$$

طريقة الانحرافات المختزلة :

ف	ك	س	ح س	$ح_س$	ك $ح_س$
١٠٠-	٨٠	١١٠	٤٥-	٩-	٧٢٠-
١٢٠-	٢٢٠	١٣٠	٢٥-	٥-	١١٠٠-
١٤٠-	٢٧٠	(١٥٥)	٠	٠	٠
١٧٠-	١٥٠	١٨٥	٣٠	٦	٩٠٠
٢٠٠-	٦٠	٢٢٠	٦٥	١٣	٧٨٠
٢٤٠-٢٦٠	٢٠	٢٥٠	٩٥	١٩	٣٨٠
مجموع	٨٠٠	--	--	--	٢٤٠

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ ك ح س}}{\text{مجـ ك}} \times ث + أ$$

$$\bar{س} = \frac{٢٤٠}{٨٠٠} \times ٥ + ١٥٥ = ١٥٦{,}٥ \text{ جنيه}$$

يلاحظ أننا توصلنا إلى نفس النتيجة باستخدام الطرق المختلفة . ولذلك فإن طريقة الانحرافات المختزلة تعتبر أفضل الطرق لسهولة الأرقام.

ويمكن في ضوء الدراسة السابقة أن نستخلص مجموعة خصائص للوسط الحسابي ، من أهمها :

١- مجموع انحرافات المفردات عن الوسط الحسابي يساوى صفر .

٢- يمكن الحصول على الوسط الحسابي لمجموعة مفردات إذا علم مجموعها دون الحاجة إلى تفاصيل الأعداد .

٣- لا يتأثر الوسط الحسابي باختلاف التوزيع .

٤- يمكن أن يتأثر الوسط الحسابي بالمفردات المتطرفة .

تطبيقات الفصل الأول

١- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات مصروفات الإعلان بالألف جنيه شهريا :

فئات	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	مجموع
عدد الشركات	٣٨	٥٢	١٠٠	٦٠	٣٠	٢٠	٣٠٠

والمطلوب : إيجاد الوسط الحسابي لمصروفات الإعلان .

٢- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات الأرباح المحققة بالألف جنيه شهريا:

فئات الربح	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	مجموع
عدد الشركات	٦٥	٩٥	١٢٠	٥٠	١٥	٥	٣٥٠

احسب الوسط الحسابي للأرباح .

٣- البيانات التالية تم استخراجها من سجلات شركة النهضة عن أجور العاملين ، وتم توزيع العاملين حسب فئات الأجر:

فئات الأجر	٢٠٠-	٢٢٠-	٢٤٠-	٢٦٠-	٢٧٠-	٢٨٠-	٢٩٠-
عدد الشركات	٣٥	٧٥	١٠٠	٤٠	٣٠	١٥	٥

احسب الوسط الحسابي للأجر .

٤- فيما يلي توزيع مجموعة من الطلاب حسب فئات الدرجات التي حصلوا عليها في امتحان أحد المقررات الدراسية .

فئات الدرجات	٠-	٧-	١٠-	١٣-	١٦-	١٨-٢٠	المجموع
عدد الطلاب	٨	٢٢	٩٠	١٢٠	٤٥	١٥	٣٠٠

احسب الوسط الحسابي للدرجات .



الفصـل الثانى

الوســـــيط Median

يعتبر الوسيط أحد المقاييس الإحصائية التي يمكن الاعتماد عليها للوصول إلى نتائج يمكن أن تحقق إفادة في اتخاذ القرارات الإدارية . ويؤخذ على الوسيط انه لايأخذ في اعتباره القيم المتطرفة .

<u>أولا : إيجاد الوسيط فى حالة المفردات :</u>

خطوات الحل :

١- يتم ترتيب المفردات تصاعديا أو تنازليا .

٢- يتم تحديد عدد المفردات .

١/٢ إذا كان عدد المفردات فرديا ، فإن الوسيط يساوى القيمة التي تتوسط المفردات .

٢/٢ إذا كان عدد المفردات زوجيا ، فإن الوسيط يساوى نصف حاصل جمع القيمتين المتوسطتين .

مثـال (١) :

فيما يلي بيان المنفق على الطعام لمجموعة من الأسر أسبوعيا بالجنيه :

٢٢٥ ، ٧٠ ، ١٩٨ ، ٥٤ ، ٣١٨ ، ١٣٧ ، ٣٢١

احسب الوسـيط .

الحـل

- يتم ترتيب المفردات تصاعديا أو تنازليا .

٥٤ ، ٧٠ ، ١٣٧ ، ١٩٨ ، ٢٢٥ ، ٣١٨ ، ٣٢١

- عدد المفردات سبعة وهو عدد فردي .
- الوسيط = القيمة المتوسطة = ١٩٨

حـــل آخـــر :

- ترتيب المفردات تنازليا :

٣٢١ ، ٣١٨ ، ٢٢٥ ، ١٩٨ ، ١٣٧ ، ٧٠ ، ٥٤

- عدد المفردات فرديا
- الوسيط = ١٩٨

مثـال (٢):

فيما يلي بيان بالدخل الشهري لمجموعة من العاملين بالجنيه:

٤٧٥ ، ٣١٥ ، ٦٢٥ ، ١٦٠ ، ٧٣٥ ، ٣٧١ ، ٣٩٥ ، ١٢٠

احسب الوسيط .

الحـــــل

- ترتيب المفردات تصاعديا :

١٢٠ ، ١٦٠ ، ٢١٥ ، ٢٧١ ، ٣٩٥ ، ٤٧٥ ، ٦٢٥ ، ٧٣٥

- الوسيط = $\frac{١}{٢}$ مجموع القيمتين المتوسطتين

- الوسيط = $\frac{٢٧١ + ٣٩٥}{٢}$ = $\frac{٦٦٦}{٢}$ = ٣٣٣ جنيها

ثانيا : <u>إيجاد الوسيط في حالة التوزيعات التكرارية</u> :

للحصول على الوسيط في حالة التوزيعات التكرارية يمكن استخدام طريقتين :

- الطريقة الأولى بالحساب ، وتستخدم المعادلة التالية :

الوسيط = الحد الأدني لفئة الوسيط + $\frac{\text{ترتيب الوسيط – التكرار السابق}}{\text{التكرار اللاحق – التكرار السابق}}$ × طول الفئة

الطريقة الثانية بالرسم من المنحني التكراري المتجمع الصاعد أو الهابط

خطوات تحديد الوسيط من التوزيعات التكرارية :

١- يتم إعداد جدول توزيع تكراري متجمع صاعد أو جدول توزيع تكراري متجمع هابط .

٢- نحدد ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجـ ك}}{٢}$

٣- تحدد الطريقة التي يمكن اتباعها :

١/٣ طريقة الحسـاب :

- فـي هـذه الطريقـة يـتم تحديـد التكـرار السـابق لترتيـب الوسـيط ، والتكـرار اللاحق.
- تحدد فئة الوسيط لتحديد الحد الأدني للفئة ثم تطبق المعادلة السابقة .

٢/٣ طريقـة الرسـم :

- نرسم المنحني التكراري المتجمع الصاعد أو الهابط .
- نحدد ترتيب الوسيط على المحور الرأسي .
- نرسم خطا أفقيا من نقطة ترتيب الوسيط حتى يقطع المنحني في نقطة .
- نسقط عمودا من نقطة التقاطع حتى يلاقي المحور الأفقي في نقطة ، تكون هذه النقطة هي قيمة الوسيط .

ملاحظـــة :

تستخدم التكرارات الصاعدة أو الهابطة ، كما يمكن أن تستخدم النسب المئوية للتكرارات .

مثـال (٣):

فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات الربح المحققة (القيمة بالآلف جنيه) :

فئات الربح	٤٠-	٦٠-	٨٠-	١٠٠-	١٢٠-	١٤٠-	١٦٠-
عدد الشركات	٣٥	٨٥	١١٥	٧٥	٥٠	٣٠	١٠

احسـب :

١- الوسيط بطريقتين مختلفتين (بالحساب والرسم).
٢- عدد الشركات التي تحقق ربحا أقل من (١٣٠) ألف جنيه .
٣- عدد الشركات التي تحقق ربحا أقل من (١٠٠) ألف جنيه .
٤- عدد الشركات التي تحقق ربحا أقل من (٨٠) ألف جنيه .

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

فئات	التكرارات الصاعدة	نسبة %
اقل من ٤٠	٠	٠
اقل من ٦٠	٣٥	٨.٧٥
اقل من ٨٠	١٢٠	٣٠.٠٠
اقل من ١٠٠	٢٣٥	٥٨.٧٥
اقل من ١٢٠	٣١٠	٧٧.٥٠
اقل من ١٤٠	٣٦٠	٩٠.٠٠
اقل من ١٦٠	٣٩٠	٩٧.٧٥
اقل من ١٨٠	٤٠٠	١٠٠.٠٠

أولا : باستخدام التكرارات الصاعدة :

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{٤٠٠}{٢} = ٢٠٠$$

يلاحظ أن ترتيب الوسيط يقع بين ١٢٠ ، ٢٣٥ وبذلك يتم تحديد التكرار السابق لترتيب الوسيط (١٢٠) والتكرار اللاحق لترتيب الوسيط (٢٣٥) وتكون فئة الوسيط (٨٠ – ١٠٠).

طريقة الحساب :

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى لفئة الوسيط} + \frac{\text{ترتيب الوسيط – التكرار السابق}}{\text{التكرار اللاحق – التكرار السابق}} \times ٢٠$$

$$\text{الوسيط} = ٨٠ + \frac{٢٠٠ - ١٢٠}{٢٣٥ - ١٢٠} \times ٢٠$$

$$= ٨٠ + ١٣.٩١٣ = ٩٣.٩١٣ \text{ ألف جنيه}$$

ثانيا : باستخدام النسب المئوية للتكرارات الصاعدة :

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$$

يلاحظ أن ترتيب الوسيط يقع بين ٣٠.٠٠ ، ٥٨.٧٥ في عمود النسب المئوية ، وتكون فئة الوسيط (٨٠ – ١٠٠) ، وباستخدام المعادلة نجد أن :

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدني لفئة الوسيط} + \frac{\text{ترتيب الوسيط – التكرار السابق}}{\text{التكرار اللاحق – التكرار السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

$$\text{الوسيط} = \frac{٥٠ - ٣٠}{٥٨.٧٥ - ٣٠} \times ٢٠ = ٩٣.٩١٣ \text{ ألف جنيه}$$

وهي نفس النتيجة السابق الحصول عليها .

- عدد الشركات التي تحقق ربحا أقل من ١٠٠ ألف جنيه = ٢٣٥ شركة (من الجدول الصاعد مباشرة)
- نسبة الشركات التي تحقق ربحا أقل من ٨٠ ألف جنيه = ٣٠%

يلاحظ أنه أمكن استخراج بعض القيم من الجدول مباشرة أما باقي القيم سواء تتعلق بالتكرارات أو النسب المئوية للتكرارات غير موجودة بالجدول، ولذلك يجب رسم المنحني التكراري المتجمع الصاعد بحسب التكرارات لاستخراج ما يتعلق بالتكرارات ، وأيضا رسم المنحني التكراري المتجمع الصاعد بحسب النسبة المئوية للإجابة عما يكون غير موجود بالجدول .

توضيح :

(١) لتحديد نسبة الشركات التي تحقق ربحا أقل من ١١٠ ألف جنيه أو أي رقم غير موجود صراحة بالجدول يتبع الخطوات التالية:

- نرسم المنحني التكراري المتجمع الصاعد .
- نحدد على المحور الأفقي الرقم المطلوب (١١٠ مثلا).
- نرسم عمودا من النقطة المطلوبة حتى يقطع المنحني في نقطة .
- نرسم خطا أفقيا من نقطة التقاطع حتى يقطع المحور الرأسي في نقطة ، تكون هي النسبة المطلوبة .

(٢) لتحديد الوسيط بالرسم من النسب المئوية يتبع ما يلي :

- نحدد ترتيب الوسيط على المحور الرأسي ، وهو ٥٠% في جميع الأحوال لأن النسب المئوية تنتهي عند ١٠٠%.
- نرسم خطا أفقيا من نقطة ترتيب الوسيط حتى يقطع المنحني في نقطة (لاحظ اتجاه السهم).
- نسقط عمودا من نقطة التقاطع حتى يلاقي المحور الأفقي في نقطة تكون هي قيمة الوسيط .

ثالثا : باستخدام التكرارات الهابطة :

الجدول التكراري المتجمع الهابط

فئات	التكرارات الصاعدة	نسبة %
٤٠ فأكثر	٤٠٠	%١٠٠.٠٠
٦٠ فأكثر	٣٦٥	٩١.٢٥
٨٠ فأكثر	٢٨٠	٧٠.٠٠
١٠٠ فأكثر	١٦٥	٤١.٢٥
١٢٠ فأكثر	٩٠	٢٢.٥٠
١٤٠ فأكثر	٤٠	١٠.٠٠
١٦٠ فأكثر	١٠	٢.٥٠
١٨٠ فأكثر	صفر	صفر

- عدد الشركات التي تحقق ربحا ٨٠ ألف جنيه فأكثر ٢٨٠ شركة
- عدد الشركات التي تحقق ربحا ١٠٠ ألف جنيه فأكثر ١٦٥ شركة

طريقـة الحسـاب :

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدني لفئة الوسيط} + \frac{\text{ترتيب الوسيط – التكرار السابق}}{\text{التكرار اللاحق – التكرار السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

يلاحظ أن المعادلة لم تتغير سواء استخدمنا التكرارات الصاعدة أو التكرارات الهابطة.

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{٤٠٠}{٢} = ٢٠٠$$

ومن جدول التكرارات الهابطـة نجد أن ترتيب الوسيط يقع بين ٢٨٠ ، ١٦٥ وبذلك يكون التكرار السابق ٢٨٠ والتكرار اللاحق ١٦٥ وتكون فئة الوسيط (٨٠-١٠٠).

$$\text{الوسيط} = ٨٠ + \frac{٢٠٠ - ٢٨٠}{١٦٥ - ٢٨٠} \times ٢٠ = ٩٣.٩١٣ \text{ ألف جنيه}$$

رابعا : باستخدام النسبة المئوية للتكرارات الهابطة :

* ترتيب الوسيط = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠
* يقع ترتيب الوسيط بين ٧٠% ، ٤١.٢٥%
* فئة الوسيط (٨٠ – ١٠٠)

$$\text{الوسيط} = ٨٠ + \frac{٥٠ - ٧٠}{٤١.٢٥ - ٧٠} \times ٢٠ = ٩٣.٩١٣ \text{ ألف جنيه}$$

توضيـح :

(١) لتحديد الوسيط بالرسم من النسب المئوية للتكرارات الهابطة يتبع ما يلي:

- نرسم المنحني التكراري المتجمع الهابط بحسب النسبة المئوية .
- نحدد ترتيب الوسيط على المحور الرأسي .
- نرسم خطـا أفقيـا مـن نقطـة ترتيـب الوسـيط حتـى يـاقي المنحنـي فـي نقطـة (لاحظ اتجاه السهم عن ٥٠%)

- نرسم عمودا من نقطة التقاطع حتى يلاقي المحور الأفقي في نقطة تكون هي قيمة الوسيط (لاحظ اتجاه السهم)

(٢) نسبة الشركات التي تحقق ربحا ١١٥ ألف جنيه فأكثر :

- نحدد النقطة المطلوبة على المحور الأفقي .
- نرسم عمودا من هذه النقطة حتى يلاقي المنحني في نقطة (لاحظ اتجاه السهم عند ١١٥).
- نرسم خطا أفقيا من نقطة التقاطع حتى يلاقي المحور الرأسي في نقطة تكون هي النسبة المطلوبة (لاحظ اتجاه السهم).
- نسبة الشركات التي تحقق ربحا ١١٥ ألف جنيه فأكثر هي ٢٨%

- عدد الشركات التي تدفع أقل من ٤٠ ألف جنيه = ١٢٠ شركة
- عدد الشركات التي تدفع أقل من ٨٠ ألف جنيه = ٣٢٠ شركة
- نسبة الشركات التي تدفع أقل من ٦٠ ألف جنيه = ٥٧.٥%
- نسبة الشركات التي تدفع أقل من ٩٠ ألف جنيه = ٨٨.٧٥ %

ثانيا : طريقة الحساب لتحديد الوسيط باستخدام النسب المئوية :

$$\textbf{ترتيب الوسيط} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$$

$$\textbf{الوسيط} = ٤٠ + \frac{٥٠ - ٣٠}{٥٧.٥ - ٣٠} \times ٢٠ = ٥٤.٥٥ \ \textbf{ألف جنيه}$$

- نسبة الشركات التي تدفع ٣٥ ألف جنيه فأكثر = ٨٠%
- نسبة الشركات التي تدفع ٧٠ ألف جنيه فأكثر = ٣٣%

ملاحظات :

- يعتمد الوسيط على القيم المتوسطة ولا يتأثر بالقيم المتطرفة لأنه لايأخذها في الاعتبار ، في حين أن الوسط الحسابي يأخذ جميع القيم .
- يعتمد الوسيط على ترتيب المفردات أو التوزيعات التجميعية الصاعدة أو الهابطة ، ويمكن تحديده بالحساب أو الرسم .
- يمكن تحديد الوسيط بالرسم من نقطة تقاطع المنحني التكراري المتجمع الصاعد والمنحني التكراري المتجمع الهابط ، وإسقاط عمود على المحور الأفقي .

تطبيقات الفصل الثانى

١- فيما يلي درجات الحرارة المسجلة خلال فترات متعددة :

١٨	٢٢	١٩	٢٢	٢١	١٨	٢٥

والمطلوب : إيجاد الوسيط للدرجات ، ومقارنته بالوسط الحسابي

٢- فيما يلي توزيع مجموعة شركات بحسب فئات الأرباح المحققة بالألف جنيه شهريا:

فئات الربح	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-٨٠	مجموع
عدد الشركات	٤٨	٧٢	١١٥	٣٠	٢٥	١٠	٣٠٠

والمطلوب :

١- إيجاد الوسيط بطريقتين مختلفتين (بالحساب والرسم).
٢- تحديد عدد الشركات التي تحقق ربحا أقل من ٤٥ ألف جنيه.
٣- تحدد نسبة الشركات التي تحقق ربحا أقل من ٥٥ ألف جنيه .
٤- تحديد عدد الشركات التي تحقق ربحا ٥٣ ألف جنيه فأكثر .
٥- تحديد نسبة الشركات التي تحقق ربحا ٣٥ ألف جنيه فأكثر .
٦- إيجاد الوسط الحسابي للأرباح

٣- فيما يلي توزيع مجموعة من الأسر بحسب فئات الإنفاق على الطعام (القيمة بالجنيه شهريا) :

فئات الإنفاق	٨٠-	١٠٠-	١٢٠-	١٤٠-	١٦٠-	١٨٠-	مجموع
عدد الأسر	٧٥	١٢٥	١٦٥	٩٥	٣٠	١٠	٥٠٠

والمطلوب :

١- إيجاد الوسط الحسابي للإنفاق على الطعام .

٢- إيجاد الوسيط بطريقتين مختلفتين (الحساب والرسم).
٣- تحديد عدد الأسر التي تنفق ١٣٠ جنيه فأكثر
٤- تحديد نسبة الأسر التي تنفق ١١٠ جنيه فأكثر .
٥- تحديد عدد الأسر التي تنفق اقل من ١١٥ جنيه .
٦- تحديد نسبة الأسر التي تنفق أقل من ١٤٥ جنيه .

٤- فيما يلي توزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات مدة الخدمة :

فئات مدة الخدمة	٤-	٨-	١٢-	١٦-	٢٠-	٢٤-	٢٨-
عدد العاملين	٨٥	١٢٥	١٧٥	٩٠	١٥	٨	٢

والمطلوب :

١- إيجاد الوسط الحسابي لمدة الخدمة .
٢- إيجاد الوسيط بالرسم فقط .
٣- تحديد عدد العاملين الذين تصل مدة خدمتهم أقل من ١٨ سنة .
٤- تحديد نسبة العاملين الذين تصل مدة خدمتهم أقل من ١٥ سنة .
٥- تحديد عدد العاملين الذين تصل مدة خدمتهم ١٠ سنوات فأكثر
٦- تحديد نسبة العاملين الذين تصل مدة خدمتهم ١٥ سنة فأكثر .



الفصــــل الثالث

المنــــوالMode

يعتبر المنوال أحد مقاييس النزعة المركزية ، وهو لا يتأثر بالقيم المتطرفة ولكنه يتأثر بالقيمة الشائعة ، ولذا يقال أن المنوال في حالة المفردات هو القيمة الأكثر شيوعا، . أو الأكثر تكرارا في حالة التوزيعات التكرارية .

أولا : إيجاد المنـوال من المفردات :

إذا كان لدينا مجموعة مفردات ، فإن المنوال هو القيمة التي تكررت أكثر من غيرها . وقد لا توجد قيمة مكررة بين المفردات وفي هذه الحالة لا توجد قيمة منوالية . يضاف إلى ذلك إذا تكررت قيمتان فإنه يقال أن لدينا قيمتين منواليتين ... وهكذا ..

مثـال (١) :

فيما يلي الدرجات التي حصل عليها مجموعة من الطلاب في امتحان مادة الرياضة :

١٨ ، ١٢ ، ١٥ ، صفر ، ٢٠ ، ١٢

احسب المنـوال .

الحــــــل

المنـوال = ١٢ وهي الدرجة التي تكررت

مثـال (٢):

بفرض أن درجات الطلاب هي :

١٨ ، ١٢ ، ١٥ ، صفر ، ٢٠ ، ١٢ ، ١٥

احسب المنـوال .

الحــــــل

المنـوال = ١٢ ، ١٥ توجد قيمتين منواليتين

مثـال (٣) :

إذا كانت درجات الطلاب هي :

١٨ ، ١٢ ، ١٥ ، صفر ، ١٧ ، ٢٠

احسب المنوال .

الحــــــل

لا توجد قيمة منواليـة .

ثانيا : إيجاد المنوال من التوزيعات التكرارية المنتظمة :

يجب قبل البحث عن إيجاد قيمة المنوال من التوزيعات التكرارية النظر أولا إلى نوع التوزيع التكراري ، وتحديد ما إذا كان التوزيع منتظما أو غير منتظم، الأمر الذي يجب إزاءه تعديل التكرارات من عدمه ، ويمكن تحديد المنوال بطريقتين : الطريقة الرياضية (طريقة الحساب) وتتضمن العديد من الطرق ، الطريقة الثانية وهي طريقة الرسم ، وسوف تقتصر الدراسة في هذا المجال على طريقة الفروق كأحد أهم الطرق الرياضية ، كما تقتصر على المدرج التكراري كوسيلة بيانية لتحديد المنوال .

١- الطريقة الرياضية (طريقة الحساب) :

تعتمد هذه الطريقة – طريقة الفروق – على تحديد نوع التوزيع ، فإذا كان التوزيع منتظما لا يلزم تعديل التكرارات . ويجب مراعاة الفئات المفتوحة من حدها الأدنى أو حدها الأعلى ، فإذا وجدت فئات مفتوحة وكانت جميع الفئات متساوية يجب إغلاق الفئات المفتوحة مع مراعاة انتظام التوزيع. بمعني أنه يجب تحديد أطوال الفئات الأخرى وإغلاق الفئة المفتوحة بحيث يتساوى طولها مع الأطوال للفئات الأخرى .

وتأتي المرحلة الثانية للحل بتحديد أكبر تكرار والذي يطلق عليه التكرار المنوالي ، ثم تحدد الفئة المقابلة للتكرار المنوالي على أنها فئة المنوال . ولعل ذكاء الباحثين والدارسين لعلوم الإحصاء يجب أن ينبه أذهانهم ويلفت نظرهم إلى تحديد المساحة التي يقع خلالها المنوال وهي الفئة المنوالية . وبذلك يكون لدي الدارس توقع مسبق لقيمة المنوال التي يصل إليها في نهاية الحل بحيث لا تزيد أو تقل عن الحد الأدنى أو الحد الأعلى لفئة المنوال .

وتأتي المرحلة الثالثة للحل بتحديد الفئتين السابقة واللاحقة لفئة المنوال . وبذلك يصبح لدينا مساحة عملية للحل تتضمن ثلاث فئات : هي فئة المنوال ، والفئة السابقة ، والفئة التالية أو اللاحقة ويقابل كل فئة تكرار معين، مع ملاحظة أن أكبر تكرار هو المقابل لفئة المنوال .

وننوه في هذا الصدد إلى أننا لا نكترث ولا نهتم إطلاقا بالفئات السابقة أو الفئات التالية للفئات الثلاث التى سبق تحديدها، مهما كان عدد الفئات السابقة أو التالية .

وتكون المرحلة الرابعة هي تحديد الفروق المطلقة بين التكرارات الثلاثة، التكرار المنوالي والتكرار السابق ، والتكرار التالي . ونعني بالفروق المطلقة إهمال الإشارة

السالبة، بمعني أننا نحسب الفرق بين التكرار المنوالي (أكبر تكرار) والتكرار السابق له ، ثم نحدد الفرق بين التكرار المنوالي (أكبر تكرار) والتكرار التالي له . فإذا رمزنا للفرق الأول بالرمز (ب) والفرق التالي بالرمز (د) فإننا يمكن أن نحدد طول الفئة المنوالية ، ونعتبر أنها تساوى (أ + جـ) وتصبح المشكلة هي تحديد قيمة (أ) وهي القيمة التي يجب إضافتها للحد الأدنى لفئة المنوال للوصول إلى القيمة المنوالية أو قيمة المنوال .

وتأسيسا على ذلك تكون المعادلة على النحو التالي :

المنوال = الحد الأدني لفئة المنوال + أ

وفي ضوء تحديد الفروق السابق الإشارة إليها يمكن تحديد قيمة (أ) باستخدام التناسب التالي :

$$\frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} =$$

ويمكن توضيح ذلك في المثال التالي :

مثـال (٤) :

فيمـا يلـي توزيـع مجموعـة مـن الشـركات بحسـب فئـات المصـروفات الإدارية والعمومية (القيمة بالألف جنيه) :

فئات المصروفات	١٠٠-	١١٠-	١٢٠-	١٣٠-	١٤٠-	١٥٠-	١٦٠-	١٧٠-
عدد الشركات	٤٥	٧٥	١٠٠	١٥٠	٨٠	٦٠	٣٠	٢٠

والمطلوب : إيجاد المنوال .

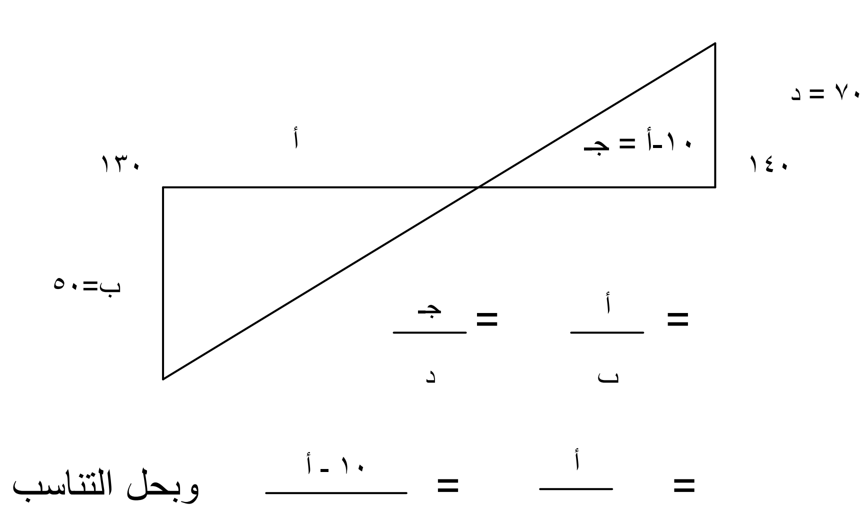
الحـــــل

يلاحظ أن التوزيع منتظم ولذا لا يجرى أي تعديل للتكرارات

ف	ك	فروق
-١٠٠	٤٥	
-١١٠	٧٥	
-١٢٠	١٠٠	ب = ٥٠
-١٣٠	١٥٠	التكرار المنوالي ←
-١٤٠	٨٠	د = ٧٠
-١٥٠	٦٠	
-١٦٠	٣٠	
١٨٠-١٧٠	٢٠	

المنوال = الحد الأدني لفئة المنوال + أ

= ١٣٠ + أ



$$= \frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$$

$$= \frac{أ}{٥٠} = \frac{١٠ - أ}{٧٠}$$ وبحل التناسب

أ × ٧٠ = ٥٠ (١٠ – أ)

٧٠أ = ٥٠٠ – ٥٠ أ

١٢٠أ = ٥٠٠ ومنها : أ = ٤.١٦٧

المنوال = ١٣٠ + ٤.١٦٧ = ١٣٤.١٦٧ ألف جنيه

٢- الطريقة البيانية (طريقة الرسم البياني) :

تعتمد هذه الطريقة البيانية على الأسس المشار إليها سابقا من حيث نوع التوزيع وما إذا كان منتظما أو غير منتظم ويتخذ نفس الإجراء من ناحية تعديل التكرارات إذا كان التوزيع غير منتظم أو تبدأ خطوات الحل مباشرة إذا كان التوزيع منتظما . وتكون خطوات الحل في حالة التوزيع المنتظم كما يلي :

- تحدد أكبر تكرار ويطلق عليه التكرار المنوالي .
- تحدد فئة المنوال وهي الفئة المقابلة للتكرار المنوالي .
- تحدد الفئتين السابقة والتالية ، بغض النظر عن باقي الفئات .
- نرسم المدرج التكراري في شكل أعمدة متلاصقة للتكرارات الثلاثة .
- نوصل قمة المستطيل الممثل للتكرار المنوالي بقمة المستطيل السابق والتالي بطريقة عكسية .
- يراعي تقاطع خطي التوصيل في نقطة .
- نرسم عمودا من نقطة التقاطع حتى يلاقي المحور الأفقي في نقطة تكون هي قيمة المنوال .

<u>ثالثا : إيجاد المنوال في حالة التوزيعات التكرارية الغير منتظمة</u> :

إذا كان التوزيع التكراري غير منتظم ، بمعني أن الفئات غير متساوية فإنه يجب تعديل التكرارات . ويراعي أنه إذا كانت جميع الفئات متساوية غير أن فئة واحدة تختلف في طولها عن أطوال باقي الفئات فإن التوزيع يعتبر غير منتظم . وقد تكون الفئة المشار إليها تقع في أول أو آخر التوزيع أو في المنتصف . ولذلك إذا وجدت فئات مفتوحة من حدها الأدنى أو حدها الأعلى فإن اختيار طول هذه الفئة لإغلاقها يمكن أن يؤدي إلى عدم انتظام التوزيع ، الأمر الذي يجب إزاءه ضرورة تعديل التكرارات . ويستخدم لتعديل التكرارات المعادلة التالية :

$$\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{التكرار}}{\text{طول الفئة}}$$

يترتب على تعديل التكرارات أن يكون التكرار المعدل يحتوى على قيم أو أعداد كسرية أو أعداد صحيحة وكسور ، ولذلك يجب التخلص من القيم الكسرية بالضرب في معامل معين ، مع مراعاة أن المعامل الذي يتم اختياره يضرب في جميع التكرارات المعدلة وصولا إلى التكرار المعدل الصحيح . فإذا رمزنا للتكرار بالرمز (ك) فإنه يمكن أن نرمز للتكرار المعدل بالرمز (ك م) وأيضا نرمز للتكرار المعدل الصحيح بالرمز (ك م ص)، وتبدأ خطوات الحل باستخدام عمودي الفئات والتكرارات المعدلة الصحيحة مع إهمال عمود التكرارات وعمود التكرارات المعدلة وباتباع نفس الخطوات في حالة التوزيع المنتظم .

مثال (٥) :

فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات الأرباح المحققة (القيمة بالألف جنيه):

فئات الربح	٢٠-	٣٠-	٥٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	مجموع
عدد الشركات	١١٥	١٦٠	٢١٠	١٣٥	٥٠	٣٠	٧٠٠

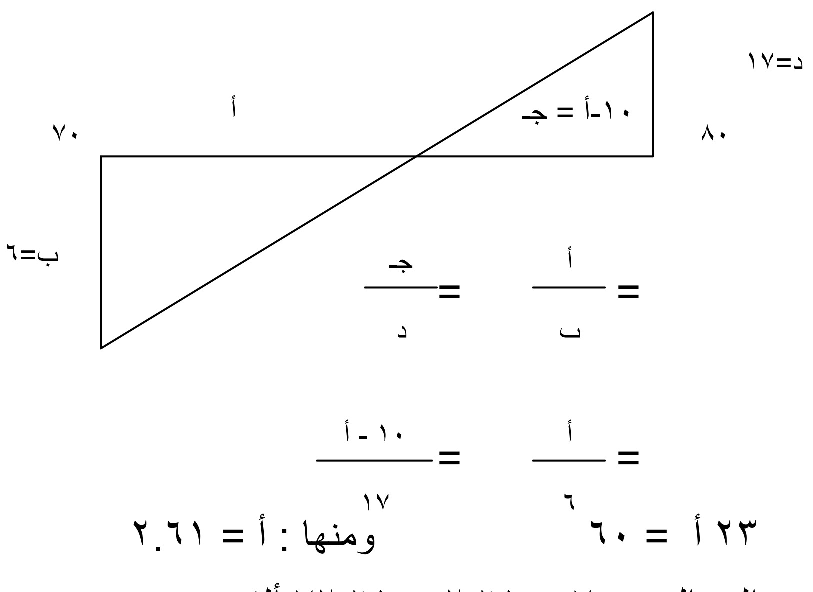
احسب المنوال .

الحـــل

ف	ك	ك م	ك م ص	فروق
٢٠-	١١٥	١١.٥	٢٣	
٣٠-	١٦٠	٨	١٦	
٥٠-	٢١٠	١٠.٥	٢١	ب=٦
٧٠-	١٣٥	١٣.٥	٢٧	التكرار المنوالي
٨٠-	٥٠	٥	١٠	د=١٧
٩٠-١٠٠	٣٠	٣	٦	

١- الطريقة الرياضيـة :

المنوال = الحد الأدني لفئة المنوال + أ



أ / ٦ = (١٠ - أ) / ١٧

٢٣ أ = ٦٠ ومنها : أ = ٢.٦١

المنوال = ٧٠ + ٢.٦١ = ٧٢.٦١ ألف جنيه

رابعا : تعدد التكرار المنوالي في حالة التوزيعات التكرارية :

يمكن أن يتعدد التكرار المنوالي (أكبر تكرار) سواء في حالة التوزيعات المنتظمة أو أكبر تكرار منوالي معدل صحيح في حالة التوزيعات غير المنتظمة ، وقد يكون التكراران متجاورين وقد يكونا متباعدين ، فإذا كانا متجاورين يمكن ضم الفئتين المقابلتين لهما في فئة واحدة يعتبر مجموعي طوليهما على أنه الفئة المنوالية . أما إذا كانا متباعدين فيصعب ذلك ويحل التمرين مرتين لتحديد القيم المنوالية .

مثـال (٦) :

فيما يلي توزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات الدخل الشهري بالجنيه:

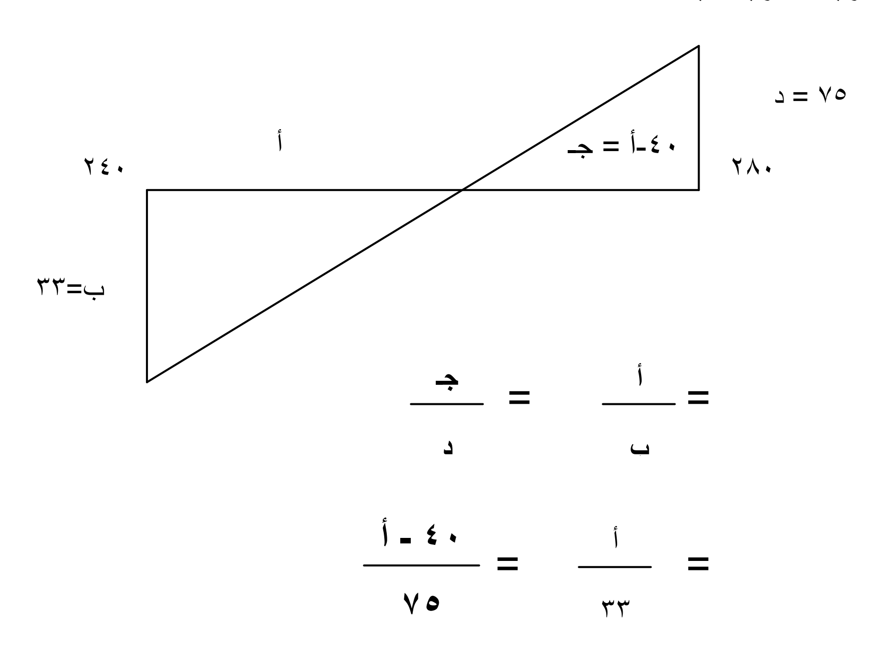
فئات الدخل	٢٠٠-	٢٢٠-	٢٤٠-	٢٦٠-	٢٨٠-	٣٠٠-	٣٢٠-
عدد العاملين	٦٨	٩٢	١٢٥	١٢٥	٥٠	٣٠	١٠

المطلوب: إيجاد المنوال .

الحـــــل

ف	ك	فروق
٢٠٠-	٦٨	
٢٢٠-	٩٢	٣٣=ب
٢٤٠-	١٢٥	التكرار المنوالي
٢٦٠-	١٢٥	
٢٨٠-	٥٠	٧٥ = د
٣٠٠-	٣٠	
٣٢٠-٣٤٠	١٠	

(١) الطريقة الرياضية :



$$= \frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$$

$$= \frac{أ}{٣٣} = \frac{٤٠ - أ}{٧٥}$$

٧٥أ = ٣٢٠ - ٣٣ أ　　　　　ومنها : أ = ١٢.٢٢

المنوال = ٢٤٠ + ١٢.٢٢ = ٢٥٢.٢٢ ألف جنيه

مثال (٧) :

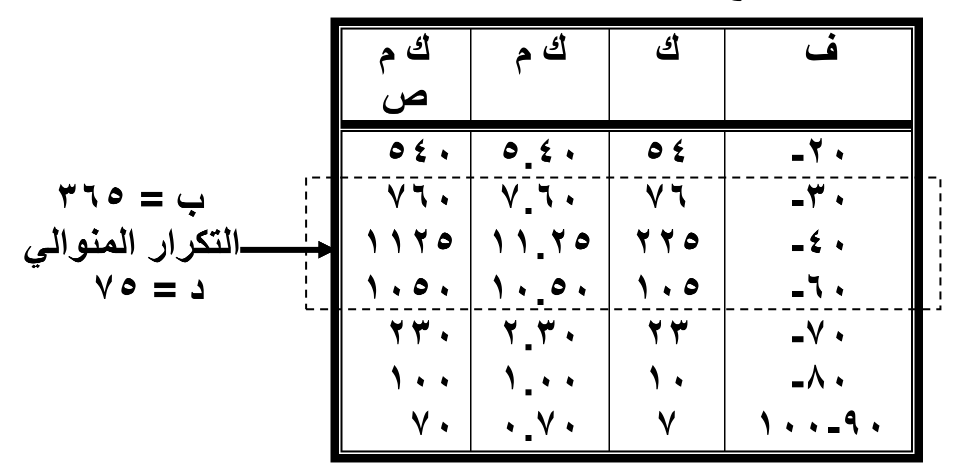
فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات المبيعات اليومية (القيمة بالألف جنيه) :

فئات المبيعات	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠
عدد الشركات	٥٤	٧٦	٢٢٥	١٠٥	٢٣	١٠	٧

المطلوب: إيجاد المنوال .

الحـــــل

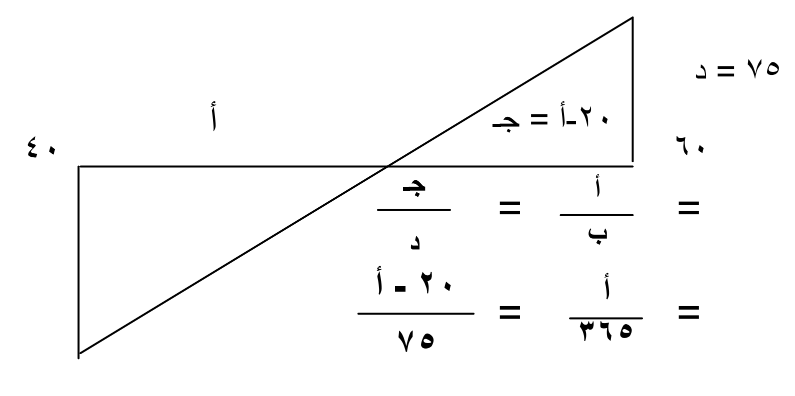
- يلاحظ أن التوزيع غير منتظم لأن طول الفئة الثالثة (٤- ٦٠) يختلف عن أطوال باقي الفئات ، ولذلك يلزم تعديل التكرارات ، وصولا إلى التكرار المعدل الصحيح .



ف	ك	ك م	ك م ص
٢٠-	٥٤	٥.٤٠	٥٤٠
٣٠-	٧٦	٧.٦٠	٧٦٠
٤٠-	٢٢٥	١١.٢٥	١١٢٥
٦٠-	١٠٥	١٠.٥٠	١٠٥٠
٧٠-	٢٣	٢.٣٠	٢٣٠
٨٠-	١٠	١.٠٠	١٠٠
٩٠-١٠٠	٧	٠.٧٠	٧٠

* تم ضرب التكرارات المعدلة في (١٠٠) كمعامل للتخلص من الكسور

الطريقة الرياضية :



١٧٥أ = ٧٣٠٠ - ٣٦٥ أ   ومنها : أ = ١٦.٥٩

المنوال = ٤٠ + ١٦.٥٩ = ٥٦.٥٩ ألف جنيه

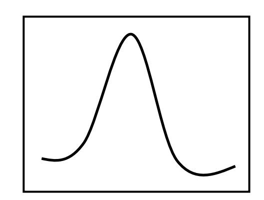
العلاقة بين المتوسطات :

يرتبط المتوسطات الثلاث : الوسط الحسابي والوسيط والمنوال بعلاقة معينة على شكل التوزيع (المنحني) ، يمكن توضيحها كما يلي :

١- التوزيع الطبيعي :

إذا كانت البيانات يمثلها توزيع طبيعي متماثل (شكل الجرس) فإن المتوسطات الثلاثة تتساوى ، بمعني أن :

الوسط الحساب = الوسيط = المنوال



٢- المنحني الملتوى ناحية اليمين :

إذا كان المنحني به التواء ناحية اليمين ، فإن العلاقة بين المتوسطات تكون كما يلي :

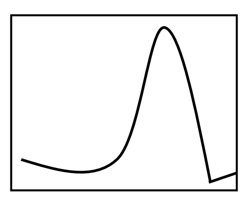
الوسط الحساب > الوسيط > المنوال



٣- المنحني الملتوى جهة اليسار :

إذا كان المنحني به التواء ناحية اليسار ، فإن العلاقة تأخذ الشكل العكسي حيث

المنوال > الوسيط > الوسط الحسابي



تطبيقـات الفصل الثالث

١- فيما يلى توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئـات الأربـاح المحققة بالألف جنيه شهريا :

فئات الربح	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-
عدد الشركات	٤٤	٦٦	٩٥	١١٠	٥٥	٢٠	٥	٥

والمطلوب :

١- إيجاد الوسط الحسابي للربح .

٢- إيجاد الوسيط بالرسم فقط .

٣- تحديد نسبة الشركات التي تربح أقل من ٣٣ الف ج .

٤- إيجاد المنوال بطريقتين مختلفتين (الحساب والرسم).

٢- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات مدة عمل الشركة بالسوق (المدة بالسنوات) :

فئات المدة	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-
عدد الشركات	٥٤	٨٦	١٢٠	٧٠	٤٥	١٥	١٠

والمطلوب :

١- إيجاد الوسط الحسابي لأعمار الشركات .

٢- إيجاد الوسيط بالحساب فقط .

٣- تحديد عدد الشركات التي تعمل في السوق لمدة ١٢ سنة فأكثر .

٤- تحديد نسبة الشركات التي تبلغ مدة عملها ١٨ سنة فأكثر .

٥- تحديد المنوال بطريقتين مختلفتين (الحساب والرسم).

٣- فيما يلي توزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات الأجر الشهري بالجنيه .

فئات الأجر	٤٥٠-	٥٠٠-	٦٠٠-	٦٥٠-	٧٠٠-	٧٥٠-	٨٠٠-
عدد الشركات	٧٥	١٢٥	٣٥٠	٢١٠	٢٥	١٠	٥

والمطلوب :

١- إيجاد الوسط الحسابي.

٢- إيجاد الوسيط بطريقتين مختلفتين (الحساب والرسم) .

٣- تحديد المنوال بطريقتين مختلفتين (الحساب والرسم).

٤-فيما يلي توزيع مجموعة من الأسر بحسب فئات المنفق على التعليم بالجنيه شهريا :

فئات الإنفاق	٢٠٠-	٢٢٠-	٢٤٠-	٢٧٠-	٣٠٠-	٣٢٠-	٣٤٠-٣٥٠
عدد الأسر	٧٠	١٢٥	٣٤٥	٣٤٥	٤٥	١٥	٥

والمطلوب: تحديد المنوال بطريقتين مختلفتين (الحساب والرسم).

٥- فيما يلي توزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات الأجر الأسبوعي بالجنيه :

فئات الأجر	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٧٥-	٨٠-	٩٠-	١٠٠-١١٠
عدد العاملين	٣٥	٥٢	٦٠	٨٥	٤٥	١٣	١٠

والمطلوب : إيجاد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال مع رسم المنحني الذي يمثل التكرارات .

الفصـــل الرابع

متوسط الانحرافات المطلقـة

يعتمد متوسط الانحرافات المطلقة على مقاييس النزعة المركزية الوسط الحسابي والوسيط والمنوال . ويطلق عليه الانحراف المتوسط عن المؤشر الذي يرتبط به. ومع أنه يحسب للمفردات فهو يحسب أيضا للتوزيعات التكرارية البسيطة، ويرتكز أساسا على إيجاد قيمة المقياس المرغوب تحديد الانحراف عنه ثم تهمل الإشارة السالبة وصولا إلى الانحرافات المطلقة ، ثم تقسم على عدد المفردات أو مجموع التكرارات حسب البيانات المستخدمة للحصول على الانحراف المتوسط .

وتجدر الإشارة إلي أن مقاييس النزعة المركزية ونعني بها الوسط الحسابي والوسيط والمنوال تهتم بتحديد مقياس لتركز القيم حول نقطة معينة، هذا في حين ان الانحراف المتوسط يهدف إلى حساب التشتت حول النقطة المشار إليها .

أولا : <u>في حالة المفردات</u> :

بفرض أن لدينا مجموعة مفردات هي :

$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، .... $س_ن$

فإنه يمكن تحديد الانحراف المتوسط لكل مقياس من مقاييس النزعة المركزية كما يلي:

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسط الحساب} = \frac{\text{مجـ}\,(س - \bar{س})}{ن}$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسيط} = \frac{\text{مجـ}\,(س - \text{الوسيط})}{ن}$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن المنوال} = \frac{\text{مجـ}\,(س - \text{المنوال})}{ن}$$

مثـال (١) :

فيما يلي بيان بإنتاجية مجموعة من العاملين من الوحدات :

١٥ ، ١٨ ، ١٢ ، ٢٥ ، ١٥

احسب الانحراف المتوسط لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

الحـل

(١) الانحراف المتوسط عن الوسط الحسابي :

س	$س - \overline{س}$
١٥	٢
١٨	١
١٢	٥
٢٥	٨
١٥	٢
٨٥	١٨

$$\overline{س} = \frac{مجـ س}{ن} = \frac{٨٥}{٥} = ١٧$$

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{مجـ (س - \overline{س})}{ن}$$

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{١٨}{٥} = ٣,٦$$

ملاحظة : تهمل الإشارة السالبة الناتجة عن طرح الوسط الحسابي من قيم المفردات .

(٢) الانحراف المتوسط عن الوسيط :

لإيجاد قيمة الوسيط يعاد ترتيب المفردات .

١٢ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٨ ، ٢٥

عدد المفردات فرديا

الوسيط = ١٥

س	س – الوسيط
١٥	٠
١٨	٣
١٢	٣
٢٥	١٠
١٥	٠
	١٦

الانحراف المتوسط عن الوسيط = $\frac{\text{مجـ (س-الوسيط)}}{\text{ن}}$

الانحراف المتوسط عن الوسيط = $\frac{١٦}{٥}$ = ٣.٢

(٣) الانحراف المتوسط عن المنوال :

المنوال = ١٥ = القيمة الشائعة (الأكثر تكرارا)

س	س – المنوال
١٥	٠
١٨	٣
١٢	٣
٢٥	١٠
١٥	٠
	١٦

الانحراف المتوسط عن المنوال = $\frac{\text{مجـ (س-المنوال)}}{\text{ن}}$

الانحراف المتوسط = $\frac{١٦}{٥}$ = ٣.٢

ثانيا : في حالة التوزيعات :

يجب ملاحظة أننا في حالة التوزيعات نتعامل دائما مع مراكز الفئات (س) والتكرارات (ك) مع مراعاة إهمال الإشارة السالبة في جميع الأحوال .

مثال (٢) :

فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات الأرباح المحققة بالألف جنيه :

لفئات الربح	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠
عدد الشركات	٢٥	٦٠	١١٥	٥٠	٣٠	١٥	٥

احسب قيمة الانحراف المتوسط (متوسط الانحرافات المطلقة) لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

الحــل

(١) متوسط الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابي :

ف	ك	س	ح س	ح س	ك ح س	س - س̄	ك(س-س̄)
٣٠-	٢٥	٣٥	٣٠-	٣-	٧٥-	٢٢.١٧	٥٥٤.٢٥
٤٠-	٦٠	٤٥	٢٠-	٢-	١٢٠-	١٢.١٧	٧٣٠.٢٠
٥٠-	١١٥	٥٥	١٠-	١-	١١٥-	٢.١٧	٢٤٩.٥٥
٦٠-	٥٠	(٦٥)	٠	٠	٠	٧.٨٣	٣٩١.٥٠
٧٠-	٣٠	٧٥	١٠	١	٣٠	١٧.٨٣	٥٣٤.٩٠
٨٠-	١٥	٨٥	٢٠	٢	٣٠	٢٧.٨٣	٤١٧.٤٥
٩٠-١٠٠	٥	٩٥	٣٠	٣	١٥	٣٧.٨٣	١٨٩.١٥
مجموع	٣٠٠	-	-	-	٢٣٥-	-	٣٠٦٧.٠٠

$$\bar{س} = \frac{مجـ ك ح س}{مجـ ك} \times ث + أ$$

$$س = \frac{-٢٣٥}{٣٠٠} \times ١٠ + ٦٥ = ٥٧,١٧$$

$$\text{متوسط الانحرافات المطلقة} = \frac{\text{مجـ [ك (س-}\overline{\text{س}}\text{)]}}{\text{مجـ ك}}$$

$$\text{متوسط الانحرافات المطلقة} = \frac{٣٠٦٧}{٣٠٠} = ١٠.٢٢٣$$

(٢) الانحرافات عن الوسيط :

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

ف	ك ص
أقل من ٣٠	٠
أقل من ٤٠	٢٥
أقل من ٥٠	٨٥
أقل من ٦٠	٢٠٠
أقل من ٧٠	٢٥٠
أقل من ٨٠	٢٨٠
أقل من ٩٠	٢٩٥
أقل من ١٠٠	٣٠٠

١٥٠
ترتيب
الوسيط

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{٣٠٠}{٢} = ١٥٠$$

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدني للفئة} + \frac{\text{ترتيب الوسيط – التكرار السابق}}{\text{التكرار اللاحق – التكرار السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

$$\text{الوسيط} = ٥٠ + \frac{١٥٠ - ٨٥}{٢٠٠ - ٨٥} \times ١٠ = ٥٥.٦٥$$

تحديد الانحرافات عن الوسيط:

ف	ك	س	س – الوسيط	ك (س – الوسيط)
٣٠-	٢٥	٣٥	٢٠.٦٥	٥١٦.٢٥
٤٠-	٦٠	٤٥	١٠.٦٥	٦٣٩.٠٠
٥٠-	١١٥	٥٥	٠.٦٥	٧٤.٧٥
٦٠-	٥٠	٦٥	٩.٣٥	٤٦.٧٥
٧٠-	٣٠	٧٥	١٩.٣٥	٥٨٠.٥٠
٨٠-	١٥	٨٥	٢٩.٣٥	٤٤٠.٢٥
٩٠-١٠٠	٥	٩٥	٣٩.٣٥	١٩٦.٧٥
مجموع	٣٠٠			٢٤٩٤.٢٥

الانحراف المتوسط عن الوسيط = $\frac{\text{مجـ [ك (س- الوسيط)]}}{\text{مجـ ك}}$

الانحراف المتوسط عن الوسيط = $\frac{٢٤٩٤.٢٥}{٣٠٠}$ = ٨.٣١

(٣) الانحراف المتوسط عن المنوال :

$ك_م$ = ١١٥ التوزيع منتظم

$ف_م$ = ١٠ (٥٠ – ٦٠)

= $\frac{أ}{ف_م – أ}$ = $\frac{ك_م – ك_١}{ك_م – ك_٢}$

$\frac{أ}{١٠ – أ}$ = $\frac{١١٥ - ٦٠}{١١٥ - ٥٠}$ = $\frac{٥٥}{٦٥}$ = $\frac{١١}{١٣}$

٢٤ أ = ١١٠ ومنها : أ = ٤.٥٨

المنوال = ٥٠ + ٤.٥٨ = ٥٤.٥٨

ف	ك	س	س – المنوال	ك (س – المنوال)
٣٠-	٢٥	٣٥	١٩.٥٨	٤٨٩.٥٠
٤٠-	٦٠	٤٥	٩.٥٨	٥٧٤.٨٠
٥٠-	١١٥	٥٥	٠.٤٢	٤٨.٣٠
٦٠-	٥٠	٦٥	١٠.٤٢	٥٢١.٠٠
٧٠-	٣٠	٧٥	٢٠.٤٢	٦١٢.٦٠
٨٠-	١٥	٨٥	٣٠.٤٢	٤٥٦.٣٠
٩٠-١٠٠	٥	٩٥	٤٠.٤٢	٢٠٢.٧٠
مجموع	٣٠٠			٢٩٠٤.٦٠

$$\text{متوسط الانحرافات المطلقة} = \frac{\text{مجـ [ك (س- المنوال)]}}{\text{مجـ ك}}$$

$$\text{متوسط الانحرافات المطلقة} = \frac{٢٩٠٤.٦}{٣٠٠} = ٩.٦٨٢$$

مثال (٣) :

فيما يلي توزيع مجموعة من الطلاب بحسب فئات الدرجات التي حصلوا عليها في امتحان أحد المقررات الدراسية :

فئات الدرجات	٠-	٧-	١٠-	١٣-	١٦-	١٨-٢٠	**مجموع**
عدد الطلاب	١٥	١٨	١٤٧	٩٠	٢٠	١٠	٣٠٠

احسب متوسط الانحرافات المطلقة لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

الحـــل

(١) الوسط الحسابي :

ف	ك	س	حس	ك حس	س - س/	ك(س-س/)
٠-	١٥	٣.٥	-٨	-١٢٠	٨.٩٤	١٣٤.١٠
٧-	١٨	٨.٥	-٣	-٥٤	٣.٩٤	٧٠.٩٢
١٠-	١٤٧	(١١.٥)	٠	٠	٠.٩٤	١٣٨.١٨
١٣-	٩٠	١٤.٥	٣	٢٧٠	٢.٠٦	١٨٥.٤٠
١٦-	٢٠	١٧	٥.٥	١١٠	٤.٥٦	٩١.٢٠
١٨-٢٠	١٠	١٩	٧.٥	٧٥	٦.٥٦	٦٥.٦٠
مجموع	٣٠٠	-	-	٢٨١	-	٦٨٥.٤٠

$$\text{س} = \frac{\text{مجـ ك ح}_{\text{س}}}{\text{مجـ ك}} + \text{أ}$$

$$\text{س} = \frac{٢٨١}{٣٠٠} + ١١.٥ = ١٢.٤٤$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـ [ك (س-}\bar{\text{س}}\text{)]}}{\text{مجـ ك}}$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسط الحسابي} = \frac{٦٨٥.٤}{٣٠٠}$$

٢- المنـوال :

يلاحظ أن التوزيع غير منتظم ، ولابد من تعديل التكرارات.

ف	ك	ك م	ك م ص
٠-	١٥	٢.١٤	٢١٤
٧-	١٨	٦.٠٠	٦٠٠
١٠-	١٤٧	٤٩.٠٠	٤٩٠٠
١٣-	٩٠	٣٠	٣٠٠٠
١٦-	٢٠	١٠	١٠٠٠
١٨-٢٠	١٠	٥	٥٠٠

التكرار المنوالي ← (الصف ١٠-)

$$= \frac{أ}{ف_م - أ} = \frac{ك_م - ك_١}{ك_م - ك_٢}$$

$$= \frac{أ}{٣ - أ} = \frac{٤٩٠٠ - ٦٠٠}{٤٩٠٠ - ٣٠٠٠} = \frac{٤٣٠٠}{١٩٠٠} = \frac{٤٣}{١٩}$$

١٩أ = ١٢٩ – ٤٣ أ ومنها : أ = ٢,١

المنوال = الحد الأدني لفئة المنوال + أ

= ١٠ + ٢.١ = ١٢.١

ويتحدد الانحراف المتوسط كما يلي :

ف	ك	س	س – المنوال	ك (س – المنوال)
٠-	١٥	٣.٥	٨.٦	١٢٩.٠٠
٧-	١٨	٨.٥	٣.٦	٦٤.٨
١٠-	١٤٧	١١.٥	٠.٦	٨٨.٢
١٣-	٩٠	١٤.٥	٢.٤	٢١٦.٠
١٦-	٢٠	١٧	٤.٩	٩٨.٠
١٨-٢٠	١٠	١٩	٦.٩	٦٩.٠
مجموع	٣٠٠			٦٦٥.٠

$$\text{الانحراف المتوسط عن المنوال} = \frac{\text{مجـ [ك (س- المنوال)]}}{\text{مجـ ك}}$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن المنوال} = \frac{٦٦٥}{٣٠٠} = ٢.٢٢$$

وتتحدد الانحرافات كما يلي :

ف	ك	س	س – الوسيط	ك (س – الوسيط)
٠-	١٥	٣.٥	٨.٩	١٣٣.٥
٧-	١٨	٨.٥	٣.٩	٧٠.٢
١٠-	١٤٧	١١.٥	٠.٩	١٣٢.٣
١٣-	٩٠	١٤.٥	٢.١	١٨٩.٠٠
١٦-	٢٠	١٧	٤.٦	٩٢.٠٠
١٨-٢٠	١٠	١٩	٦.٦	٦٦.٠٠
مجموع	٣٠٠			٦٨٣.٠٠

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسيط} = \frac{\text{مجـ [ك (س- الوسيط)]}}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{٦٨٣}{٣٠٠} = ٢,٢٨$$

تطبيقات الفصل الرابع

١- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات الضرائب المدفوعة بالألف جنيه سنويا :

فئات الضرائب	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	مجموع
عدد الشركات	٦٥	٩٧	١٢٣	٨٠	٤٥	٣٠	١٠	٤٥٠

والمطلوب :

إيجاد قيمة الانحراف المتوسط (متوسط الانحرافات المطلقة) لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

٢- فيما يلي توزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات الأجر الشهري بالجنيه .

فئات الأجر	٢٠٠-	٢١٠-	٢٢٠-	٢٤٠-	٢٦٠-	٢٧٠-	٢٨٠-	٢٩٠-
عدد العاملين	٣٥	٧٥	١٦٨	١٦٨	٩٣	٤٧	٩	٥

والمطلوب :

تحديد قيمة الانحراف المتوسط لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

٣- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات الأرباح المحققة بالألف جنيه شهريا :

فئات الربح	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-	٧٥-	٨٥-١٠٠
عدد الشركات	٥٤	٨٦	١٢٠	٩٥	٧٥	٦٠	١٠

والمطلوب :

تحديد قيمة الانحراف المتوسط لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

٤- فيما يلي توزيع مجموعة من الطلاب بحسب فئات الطول بالسنتيمتر:

فئات الطول	١٤٥-	١٥٠-	١٥٥-	١٦٠-	١٦٥-	١٧٠-	١٧٥-
عدد الطلاب	٦٠	٨٥	١٢٥	١٨٠	٧٥	٥٥	٢٠

والمطلوب :

تحديد قيمة الانحراف المتوسط لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال مع تحديد المنوال والوسيط بالرسم ، وتحديد منحني العلاقة بين المتوسطات .

الباب الثانى
مقاييس التشتت
Measures of Dispersion

الفصل الأول : الإنحراف المعيارى

الفصـــــل الأول
الانحـــــراف المعيـــاري
Standard Deviation

يعتبر الانحراف المعياري أحد أهم مقاييس التشتت، وتزداد أهميته إذا علمنا أنه يعتمد على جميع القيم من ناحية كما أنه لا يحتاج إلى إهمال الاشارات السالبة لفروق المتوسط الحسابي حيث يستخدم مربع الانحرافات، ويتصف الانحراف المعيار بالدقة لاعتماده على إيجاد الجذر التربيعي لمربع انحرافات القيم عن الوسط الحسابي. ويمكن أن نرمز للانحراف المعياري بالرمز (ع).

أولا : إيجاد الانحراف المعيارى في حالة المفردات :

يمكن إيجاد الانحراف المعيار (ع) لمجموعة المفردات :

$س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، .... س_ن$

وذلك بعدة طرق ، كما سبق استخدامه في الوسط الحسابي.

١- الطريقة المباشرة :

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ س^٢}{ن} - \left(\frac{مجـ س}{ن}\right)^٢}$$

مثـال (١) :

فيما يلي الأرباح السنوية لمجموعة من الشركات بالألف جنيه : ٨٥٠ ، ٤٧٠ ، ٦٩٠ ، ٥٣٠ ، ٩١٠

احسب الانحراف المعياري .

الحـل

س	$س^٢$
٨٥٠	٧٢٢٥٠
٤٧٠	٢٢٠٩٠٠
٦٩٠	٤٧٦١٠٠
٥٣٠	٢٨٠٩٠٠
٩١٠	٨٢٨١٠٠
٣٤٥٠	٢٥٢٨٥٠٠

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ س^2}{ن} - \left(\frac{مجـ س}{ن}\right)^2}$$

$$ع = \sqrt{\frac{٢٥٢٨٥٠٠}{٥} - \left(\frac{٣٤٥}{ن}\right)^2}$$

= ١٧٢,٠٤٧ ألف جنيه

ويعتمد الانحراف المعياري على جميع قيم المجموعة كما هو الحال في الانحراف المتوسط ومن الواضح أننا نحصل على انحرافات القيم عن وسطها الحسابي ثم نقوم بتربيع هذه الانحرافات بدون إهمال الإشارات السالبة ونحصل على متوسط مربعاتها ، وهذا ما يسمي (التباين) ونرمز له بالرمز ($ع^2$) ، وبأخذ الجذر التربيعى للتباين نحصل على الانحراف المعياري، ويمكن توضيح ذلك بحل المثال السابق كما يلي :

س	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^2$
٨٥٠	١٦٠	٢٥٦٠٠
٤٧٠	٢٢٠-	٤٨٤٠٠
٦٩٠	٠	٠
٥٣٠	١٦٠-	٢٥٦٠٠
٩١٠	٢٢٠	٤٨٤٠٠
٣٤٥٠		١٤٨٠٠٠

$$\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن} = \frac{٣٤٥٠}{٥} = ٦٩٠$$

$$ع^2 = \frac{مجـ (س - \bar{س})^2}{ن} = \frac{١٤٨٠٠٠}{٥} = ٢٩٦٠٠$$

$$ع = \sqrt{٢٩٦٠٠} = ١٧٢.٠٤٧$$

مثال (٢) :

فيما يلي الدرجات التي حصل عليها مجموعة طلاب في امتحان أحد المقررات الدراسية :

١٨ ، ١٢ ، ٢٠ ، ١١ ، ١٤

احسب الانحراف المعياري .

الحـــل

س	س – $\overline{س}$	$(س-\overline{س})^٢$
١٨	٣	٩
١٢	٣-	٩
٢٠	٥	٢٥
١١	٤-	١٦
١٤	١-	١
٧٥		٦٠

$$\overline{س} = \frac{٧٥}{٥} = ١٥$$

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ (س - \overline{س})^٢}{ن}} = \sqrt{\frac{٦٠}{٥}} = ٣.٤٦٤$$

ملاحظـات :

- يلاحظ أننا نحصل على الوسط الحسابي للمفردات ، ثم نوجد انحرافات القيم عن وسطها الحسابي ، وبطبيعة الحال فإن مجموع انحرافات المفردات عن وسطها الحسابي يساوى الصفر، ولذلك وحتى لا نهمل الإشارات السالبة فإننا نحصل على مربع الانحرافات والذي نرمز إليه بالرمز $(س – س^/)^٢$ وبذلك تتلاشى الإشارات السالبة دون الحاجة إلى إهمالها ، ثم نحصل على مجموع مربعات الانحرافات .
- التباين $(ع^٢)$ هو متوسط مجموع مربعات انحرافات القيم أو المفردات عن الوسط الحسابي = $\frac{مجـ (س - \overline{س})^٢}{ن}$

- الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين (ع) .
- يلاحظ أننا نصل إلى نفس النتيجة لأن المعادلة واحدة وإن اختلفت في شكل صورتها .
- قد يفضل الباحث أو الدارس صورة على أخرى لسهولة التعامل مع الأرقام ولكن النتيجة واحدة في جميع الأحوال .

حـل آخـر

س	$س^2$
١٨	٣٢٤
١٢	١٤٤
٢٠	٤٠٠
١١	١٢١
١٤	١٩٦
٧٥	١١٨٥

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ س^2}{ن} - \left(\frac{مجـ س}{ن}\right)^2}$$

$$ع = \sqrt{\frac{١١٨٥}{٥} - \left(\frac{٧٥}{٥}\right)^2} = ٣,٤٦٤$$

مثـال (٣) :

فيما يلي أوزان مجموعة أشخاص بالكيلو جرام :

٨٢ ، ٦٥ ، ٧٨ ، ٨٤ ، ٦٩ ، ٩١ ، ٧٧ ، ٦٤

احسب الانحراف المعيار للوزن ، والوسط الحسابي .

الحـل

س	$س^2$
٨٢	٦٧٢٤
٦٥	٤٢٢٥
٧٨	٦٠٨٤
٨٤	٧٠٥٦
٦٩	٤٧٦١
٩١	٨٢٨١
٧٧	٥٩٢٩
٦٤	٤٠٩٦
٦١٠	٤٧١٥٦

$$\overline{س} = \frac{مجـ س}{ن} = \frac{٦١٠}{٨} = ٧٦.٢٥ \text{ كيلو جرام}$$

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ س^2}{ن} - \left(\frac{مجـ س}{ن}\right)^2}$$

$$ع = \sqrt{\frac{٤٧١٥٦}{٨} - \left(\frac{٦١٠}{٨}\right)^2} = ٨.٩٧ \text{ كجم}$$

يمكـن ملاحظـة أن المفـردات الكبيـرة القيمـة يمكـن أن يترتـب عليهـا ضـخامة الأعـداد، ولـذلك يمكـن توسـيط الطـرق السـابق الإشـارة إليهـا عنـد دراسـة الوسـط الحسابي وهي : طريقة الانحرافات البسيطة ، وطريقة الانحرافات المختزلة .

حـل آخـر

س	س – $\bar{س}$	$(س-\bar{س})^{٢}$
٨٢	٥.٧٥	٣٣.٠٦٢٥
٦٥	١١.٢٥-	١٢٦.٥٦٢٥
٧٨	١.٧٥	٣.٠٦٢٥
٨٤	٧.٧٥	٦٠.٠٦٢٥
٦٩	٧.٢٥-	٥٢.٠٦٢٥
٩١	١٤.٧٥	٢١٧.٥٦٢٥
٧٧	٠.٧٥	٠.٥٦٢٥
٦٤	١٢.٢٥-	١٥٠.٠٦٢٥
٦١٠		٦٤٣.٠٠٠٠

$$\bar{س} = \frac{٦١٠}{٨} = ٧٦.٢٥$$

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ (س - \bar{س})^{٢}}{ن}}$$

$$ع = \sqrt{\frac{٦٤٣}{٨}} = ٨.٩٧ \text{ كجم}$$

ملاحظـة :

يمكن بمتابعة الخطوات التأكد من صحة الحل ، بجمع العمود الثاني والذي يعبر عن انحرافات المفردات عن الوسط الحسابي نجد أن المجموع يساوي الصفر .

٢- طريقة الانحرافات البسيطة لايجاد الانحراف المعياري :

تعتمد هذه الطريقة على اختيار مفردة تتوسط المفردات من حيث القيمة واعتبارها وسطا فرضيا (أ) وطرحها من جميع المفردات لنحصل على الانحرافات البسيطة ($ح_س$) ، وتأخذ المعادلات الشكل التالي :

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ ح_س^٢}{ن} - \left(\frac{مجـ ح_س}{ن}\right)^٢}$$

مثال (٤) :

فيما يلي الأرباح السنوية لمجموعة من المحلات بالألف جنيه :
٨٥٠ ، ٦٧٥ ، ٧٢٥ ، ٧٤٤ ، ٥٥٠

احسب الانحراف المعياري .

الحـــل

س	$ح_س$ = س-أ	$ح_س^٢$
٨٥٠	١٢٥	١٥٦٢٥
٦٧٥	٥٠-	٢٥٠٠
(٧٢٥)	٠	٠
٧٤٤	١٩	٣٦١
٥٥٠	١٧٥-	٣٠٦٢٥
	٨١-	٤٩١١١

أ = ٧٢٥

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ ح_س^٢}{ن} - \left(\frac{مجـ ح_س}{ن}\right)^٢}$$

$$ع = \sqrt{\frac{٤٩١١١}{٥} - \left(\frac{٨١}{٥}\right)^٢} = ٩٧,٧٧٤ \text{ ألف جنيه}$$

مثـال (٥) :

فيما يلي الأجر الشهري لمجموعة من العاملين بالجنيه :

٣٦٥ ، ٩٤٥ ، ٧١٥ ، ٦٨٥ ، ٥٧٠

احسب الانحراف المعياري .

الحــل

س	$ح_س$ = س-أ	$ح^2_س$
٣٦٥	٣٢٠-	١٠٢٤٠٠
٩٤٥	٢٦٠	٦٧٦٠٠
٧١٥	٣٠	٩٠٠
(٦٨٥)	٠	٠
٥٧٠	١١٥-	١٣٢٢٥
	١٤٥-	١٨٤١٢٥

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ ح^2_س}{ن} - \left(\frac{مجـ ح_س}{ن}\right)^2}$$

$$ع = \sqrt{\frac{١٨٤١٢}{٥} - \left(\frac{-١٤٥}{٥}\right)^2} = ٩٧,٧٧٤ \text{ ألف جنيه}$$

$$= \sqrt{٣٥٩٨٤} = ١٨٩,٦٩٤$$

حــل آخــر

س	(س – $\bar{س}$)	(س – $\bar{س}$)^2
٣٦٥	٢٩١-	٨٤٦٨١
٩٤٥	٢٨٩	٨٣٥٢١
٧١٥	٥٩	٣٤٨١
٦٨٥	٢٩	٨٤١
٥٧٠	٨٦-	٧٣٩٦
٣٢٨٠	صفر	١٧٩٩٢٠

$$\bar{س} = \frac{٣٢٨٠}{٥} = ٦٥٦$$

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ (س - \bar{س})^٢}{ن}}$$

$$ع = \sqrt{\frac{١٧٩٩٢٠}{٥}} = ١٨٩.٦٩٤$$ وهي نفس النتيجة .

٣- <u>طريقة الانحرافات المختزلة لإيجاد الانحراف المعياري</u> :

أوضحت الأمثلة السابقة ان طريقة الانحرافات البسيطة بطرح وسط فرضي أدت إلى تصغير الأعداد إلى حد ما غير أنه بقسمة الانحرافات البسيطة على مقدار ثابت (ث) يمكن الوصول إلى الانحرافات المختزلة .

$$\bar{ح}_س = (ح_س \div ث)$$

وتأخذ معادلة الانحراف المعياري الشكل التالي :

$$ع = \sqrt{\left[\frac{مجـ \bar{ح}^٢_س}{ن} - \left(\frac{مجـ \bar{ح}_س}{ح_س} \right)^٢ \right]} \times ث$$

مثال (٦):

باستخدام بيانات مثال ٥ . احسب الانحراف المعياري وباستخدام طريقة الانحرافات المختزلة .

الحــل

$\bar{ح}^٢$س	$\bar{ح}_س = ح_س \div ث$	$ح_س$ = س-أ	س
٤٠٦٩	-٦٤	-٣٢٠	٣٦٥
٢٧٠٤	٥٢	٢٦٠	٩٤٥
٣٦	٦	٣٠	٧١٥
٠	٠	٠	(٦٨٥)
٥٢٩	-٢٣	-١١٥	٥٧٠
٧٣٦٥	-٢٩		

أ = ٦٨٥ ث = ٥

$$ع = \sqrt{\left(\frac{\text{مجـ } \bar{ح}\text{س}^{2}}{ن}\right) - \left(\frac{\text{مجـ } \bar{ح}\text{س}}{ن}\right)^{2}} \times ث$$

$$ع = \sqrt{\left(\frac{٧٣٦٥}{٥}\right) - \left(\frac{-٢٩}{٥}\right)^{2}} + ٥ = ١٨٩,٦٩٤ \text{ج}$$

<u>ثانيا : الانحراف المعياري من التوزيعات التكرارية البسيطة</u> :

يمكن إيجاد التباين ($ع^{2}$) والانحراف المعياري (ع) من التوزيعات التكرارية البسيطة بغض النظر عن نوع التوزيع منتظم أو غير منتظم – وكما أن الوسط الحسابي لا يتأثر بنوع التوزيع فنجد أيضا أن التباين والانحراف المعياري لا يتأثر أي منهما بذلك. ويعتمد إيجاد التباين والانحراف المعياري على تحديد مراكز الفئات ثم استخدام إحدى الطرق المختلفة السابق دراستها .

١- الطريقة المباشرة :

$$\text{التباين} = ع^{2} = \frac{\text{مجـ ك س}^{2}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}\right)^{2}$$

وبأخذ الجذر التربيعي نحصل على الانحراف المعياري :

$$ع = \sqrt{\left(\frac{\text{مجـ ك س}^{2}}{\text{مجـ ك}}\right) - \left(\frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}\right)^{2}}$$

مثـال (٧) :

فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات مصروفات الإعلان (القيمة بالألف جنيه) :

ف	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	١٠٠-١١٠	مجموع
ك	٦٥	٩٠	١٢٥	١٥٥	٨٥	٤٥	٣٥	٦٠٠

والمطلوب :

١- إيجاد الانحراف المعياري.

٢- إيجاد التباين .

الحــل

ف	ك	س	ك س	ك س^{٢}
٤٠-	٦٥	٤٥	٢٩٢٥	١٣١٦٢٥
٥٠-	٩٠	٥٥	٤٩٥٠	٢٧٢٢٥٠
٦٠-	١٢٥	٦٥	٨١٢٥	٥٢٨١٢٥
٧٠-	١٥٥	٧٥	١١٦٢٥	٨٧١٨٧٥
٨٠-	٨٥	٨٥	٧٢٢٥	٦١٤١٢٥
٩٠-	٤٥	٩٥	٤٢٧٥	٤٠٦١٢٥
١٠٠-١١٠	٣٥	١٠٥	٣٦٧٥	٣٨٥٨٧٥
مجموع	٦٠٠		٤٢٨٠٠	٣٢١٠٠٠٠

$$\text{ع}^{٢} = \frac{\text{مجـ ك س}^{٢}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}\right)^{٢}$$

$$= \frac{٣٢١٠٠٠}{٦٠٠} - \left(\frac{٧٢٨٠٠}{٦٠٠}\right)^{٢} = ٢٦١,٥٥٦$$

$$\text{ع}^{٢} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ك س}^{٢}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}\right)^{٢}}$$

$$\therefore \text{ع} = \sqrt{\frac{٣٢١٠٠٠}{٦٠٠} - \left(\frac{٤٢٨٠٠}{٦٠٠}\right)^{٢}}$$

ويمكن الحصول على الإنحرافالمعيارى عن طريق التباين لهذا الجذر التربيعى للتباين

$$\text{أو ع} = \sqrt{٢٦١,٥٥٦} = ١٦,١٧٣$$

يلاحظ أنـه يمكن الحصول علـى التبـاين ، وإيجـاد الجـذر التربيعـي للنـاتج للحصول على الانحراف المعياري ، كما يمكن الوصول إلـى الانحـراف المعيـاري ثم إيجاد مربع الناتج وصولا إلى التباين .

طريقة الانحرافات البسيطة :

ف	ك	س	$ح_{س}$	$ك\ ح_{س}$	$ك\ ح_{س}$
٤٠-	٦٥	٤٥	-٣٠	-١٩٥٠	٥٨٥٠٠
٥٠-	٩٠	٥٥	-٢٠	-١٨٠٠	٣٦٠٠٠
٦٠-	١٢٥	٦٥	-١٠	-١٢٥٠	١٢٥٠٠
٧٠-	١٥٥	(٧٥)	٠	٠	٠
٨٠-	٨٥	٨٥	١٠	٨٥٠	٨٥٠٠
٩٠-	٤٥	٩٥	٢٠	٩٠٠	١٨٠٠٠
١٠٠-١١٠	٣٥	١٠٥	٣٠	١٠٥٠	٣١٥٠٠
مجموع	٦٠٠			-٢٢٠٠	١٦٥٠٠٠

أ = ٧٥

$$\text{التباين} = ع^{2} = \frac{\text{مجـ}\ ك\ ح_{س}^{2}}{\text{مجـ}\ ك} - \left(\frac{\text{مجـ}\ ك\ ح_{س}}{\text{مجـ}\ ك}\right)^{2}$$

$$ع^{2} = \frac{١٦٥٠٠٠}{٦٠٠} - \left(\frac{-٢٢٠٠}{٦٠٠}\right)^{2} = ٢٦١,٥٥٦$$

$$\text{الانحراف المعياري} = ع = \sqrt{٢٦١,٥٥٦} = ١٦,١٧٣$$

**** طريقة الانحرافات المختزلة :**

ف	ك	س	$ح_{س}$	$\bar{ح}_{س}$	$ك\ \bar{ح}_{س}$	$ك\ \bar{ح}^{2}_{س}$
٤٠-	٦٥	٤٥	-٣٠	-٣	-١٩٥	٥٨٥
٥٠-	٩٠	٥٥	-٢٠	-٢	-١٨٠	٣٦٠
٦٠-	١٢٥	٦٥	-١٠	-١	-١٢٥	١٢٥
٧٠-	١٥٥	(٧٥)	٠	٠	٠	٠
٨٠-	٨٥	٨٥	١٠	١	٨٥	٨٥
٩٠-	٤٥	٩٥	٢٠	٢	٩٠	١٨٠
١٠٠-١١٠	٣٥	١٠٥	٣٠	٣	١٠٥	٣١٥
مجموع	٦٠٠				-٢٢٠	١٦٥٠

أ = ٧٥ ث = ١٠

$$ع = \sqrt{\left(\frac{مجـ\ \overline{ح}س^{٢}}{ن}\right) - \left(\frac{مجـ\ \overline{ح}س}{ن}\right)^{٢}} \times ث$$

$$ع = \sqrt{\left(\frac{١٦٥٠}{٦٠٠}\right) - \left(\frac{-٢٢٠}{٦٠٠}\right)^{٢}} \times ١٠ = ٢٦١,٦٩٤ ج$$

<u>ثالثا</u> : <u>معامل الاختلاف المعياري</u> :

يعتبر معامل الاختلاف المعياري مقياسا للتشتت النسبي . وهو عبارة عن نسبة الانحراف المعياري إلى الوسط الحسابي وتأخذ المعادلة الصورة :

$$\text{معامل الاختلاف المعياري} = \frac{ع}{\overline{س}} \times ١٠٠$$

ويمكن الاستفادة من معامل الاختلاف المعياري عند مقارنة نتائج مجتمعين أو عينتين تختلفان في وحدات القياس ، حيث يصعب الاعتماد على المقاييس الأخرى لمقارنة الدخل لمجموعة بالوزن لمجموعة أخرى أو مقارنة الطول بمستوى الإنفاق وهكذا ... وغير خاف أن وحدات قياس أي ظاهرة تعتمد على طبيعة ونوعية وحدات القياس .

ولذلك فإن مقاييس التشتت الأخرى يصعب الاعتماد عليها عند مقارنة الظواهر ويرجع ذلك إلى اختلاف القيمة العددية المستخدمة .

مثال (٨) :

فيما يلي الدرجات التي حصل عليها مجموعة طلاب في امتحان مادتين الرياضة واللغات :

درجات الرياضة	٢٠	١٦	١٧	١٥	١٤	١٦	١١	١٠
درجات اللغات	١٤	١٥	١٨	١٣	١٠	١٢	١٩	١١

والمطلوب : مقارنة نتائج الطلاب في المادتين مبينا الوسط الحسابي والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف المعياري.

الحــل

١- درجات الرياضة (س) :

س	س٢
٢٠	٤٠٠
١٦	٢٥٦
١٧	٢٨٩
١٥	٢٢٥
١٤	١٩٦
١٦	٢٥٦
١١	١٢١
١٠	١٠٠
١١٩	١٨٤٣

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{١٩٦}{٨} = ١٤,٨٧٥ \text{ درجة}$$

$$\text{ع}_{\text{س}} = \sqrt{\frac{\text{مجـ س}^٢}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^٢}$$

$$= \sqrt{\frac{١٨٤٣}{٨} - \left(\frac{١١٩}{٨}\right)^٢} = ٣,٠١٨ \text{ درجة}$$

$$\text{معامل الاختلاف المعياري} = \frac{\text{ع س}}{\bar{\text{س}}} \times ١٠٠ = \frac{٣,٠١٨}{١٤,٨٧٥} \times ١٠٠$$

$$= ٢٠.٢٩\%$$

٢ـ درجات اللغة (ص) :

ص	ص٢
١٤	١٩٦
١٥	٢٢٥
١٨	٣٢٤
١٣	١٦٩
١٠	١٠٠
١٢	١٤٤
١٩	٣٦١
١١	١٢١
١١٢	١٦٤٠

$$\bar{ص} = \frac{مجـ ص}{ن} = \frac{١١٢}{٨} = ١٤ \text{ درجة}$$

$$ع_{ص} = \sqrt{\frac{مجـ ص^{٢}}{ن} - \left(\frac{مجـ ص}{ن}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{١٦٤٠}{٨} - \left(\frac{١١٢}{٨}\right)^{٢}} = ٣ \text{ درجة}$$

$$\text{معامل الاختلاف المعياري} = \frac{ع_{ص}}{\bar{ص}} \times ١٠٠ = \frac{٣}{١٤} \times ١٠٠$$

$$= ٢١.٤٣\%$$

ويمكن تلخيص النتائج في الجدول التالي :

المقارنة / المادة	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري	معامل الاختلاف
الرياضة	١٤.٨٧٥	٣.٠١٨	٢٠.٢٩%
اللغة	١٤	٣	٢١.٤٣%

- يتضـح سـهولة المقارنـة فـي هـذا المثـال لأن وحـدات القيـاس واحـدة وهـي درجات الطلاب في مادتين .
- بمقارنـة الوسط الحسابي نجد أن درجات الرياضة نتائجها أفضل من درجـات اللغة .
- بمقارنـة الانحـراف المعيـاري نجد أن تشـتت درجـات الرياضـة عـن الوسـط الحسابي أكبر منه في حالة اللغة ، الأمر الذي يستنتج منـه أن تركـز درجـات اللغات حول الوسط الحسابي أفضل من الرياضة .
- بمقارنة الانتشـار النسبي – معامل الاختلاف المعيـاري – نجد أن الانتشـار النسبي للرياضة أفضل منه في اللغات ، وهو عكس الاستنتاج السابق .

مثـال (٩) :

فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئـات الضـريبة المدفوعـة بـالألف جنيه سنويا :

فئات الضريبة	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠	مجموع
عدد الشركات	٦٥	١٢٥	١٥٠	٦٠	٣٠	٢٠	٤٥٠

والمطلوب :

احسب معامل الاختلاف المعياري للضرائب المدفوعة.

الحــل

ف	ك	س	حس	**ح**س	ك **ح**س	ك **ح**^{٢}س
٤٠-	٦٥	٤٥	٢٠-	٢-	١٣٠-	٢٦٠
٥٠-	١٢٥	٥٥	١٠-	١-	١٢٥-	١٢٥
٦٠-	١٥٠	(٦٥)	٠	٠	٠	٠
٧٠-	٦٠	٧٥	١٠	١	٦٠	٦٠
٨٠-	٣٠	٨٥	٢٠	٢	٦٠	١٢٠
٩٠-١٠٠	٢٠	٩٥	٣٠	٣	٦٠	١٨٠
مجموع	٤٥٠				٧٥-	٧٤٥

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك ح}_{\text{س}}}{\text{مجـ ك}} \times \text{ث} + \text{أ}$$

$$\bar{\text{س}} = \frac{-٧٥}{٤٥٠} \times ١٠ + ٦٥ = ٦٣.٣٣٣ \text{ ألف جنيه}$$

$$\text{ع} = \sqrt{\left[\frac{\text{مجـ ك ح}_{\text{س}}^{٢}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ك ح}_{\text{س}}}{\text{مجـ ك}} \right)^{٢} \right]} \times \text{ث}$$

$$\text{ع}^{٢} = \sqrt{\left[\frac{٧٤٥}{٤٥٠} - \left(\frac{-٧٥}{٤٥} \right)^{٢} \right]} \times ١٠ = ١٢.٧٥٨$$

$$\text{معامل الاختلاف المعياري} = \frac{\text{ع}}{\bar{\text{س}}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٢.٧٥٨}{٦٣.٣٣٣} \times ١٠٠ = ٢٠.١٤٤\%$$

يتضح مما سبق أنه يمكن حساب معامل الاختلاف المعياري أو التشتت النسبي للبيانات سواء في صورة مفردات او توزيعات تكرارية، ويفيد في تحقيق مقارنة بين مجموعتين سواء كانت نفس وحدات القياس مستخدمة للمجموعتين أو كانت مختلفة. ونوضح ذلك في المثال التالي :

مثـال (١٠) :

فيما يلي أطوال مجموعة أشخاص بالسنتيمتر (س) وأوزانهم بالكيلو جرام (ص) :

الطول بالسنتيمتر	١٧٥	١٦٣	١٧٨	١٦٩	١٦٨	١٦٦	١٧٢
الوزن كيلو جرام	٨٠	٧٥	٩٣	٨٢	٧٧	٦٨	٦٩

والمطلوب :

مقارنة الظاهرتين (الوزن والطول).

الحـــل

١- الطـــول (س) :

س	$س^٢$
١٧٥	٣٠٦٢٥
١٦٣	٢٦٥٦٩
١٧٨	٣١٦٨٤
١٦٩	٢٨٥٦١
١٦٨	٢٨٢٢٤
١٦٦	٢٧٥٥٦
١٧٢	٢٩٥٨٤
١١٩١	٢٠٢٨٠٣

$$\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن} = \frac{١١٩١}{٧} = ١٧٠.١٤٣ \text{ سم}$$

$$ع_{س} = \sqrt{\frac{٢٠٢٨٠٣}{٧} - \left(\frac{١١٩١}{٧}\right)^{٢}} = ٤.٨٢٣ \text{ سم}$$

$$\text{معامل الاختلاف المعياري} = \frac{ع_{س}}{\bar{س}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٤.٨٢٣}{١٧٠.١٤} \times ١٠٠ = ٢,٨٣٥\%$$

٢- الــوزن (ص) :

ص	ص٢
٨٠	٦٤٠٠
٧٥	٥٦٢٥
٩٣	٨٦٤٩
٨٢	٦٧٢٤
٧٧	٥٩٢٩
٦٨	٤٦٢٤
٦٩	٤٧٦١
٥٤٤	٤٢٧١٢

$$\bar{ص} = \frac{مجـ ص}{ن} = \frac{٥٤٤}{٧} = ٧٧.٧١٤ \text{ كجم}$$

$$ع_{ص} = \sqrt{\frac{مجـ ص^{٢}}{ن} - \left(\frac{مجـ ص}{ن}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{٤٢٧١٢}{٧} - \left(\frac{٥٤٤}{٧}\right)^{٢}} = ٧.٣٨٩ \text{ كجم}$$

$$\text{معامل الاختلاف المعياري} = \frac{ع_{ص}}{\bar{ص}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٧,٨٩}{٧٧,٧١٤} \times ١٠٠ = ١٠.١٥٣\%$$

ويمكن تلخيص النتائج السابق الحصول عليها في الجدول التالي :

المقارنة / الظاهرة	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري	معامل الاختلاف
الطول	١٧٠.١٤٣	٤.٨٢٣	٢.٨٣٥%
الـوزن	٧٧.٧١٤	٧.٨٩	١٠.١٥٣%

ومن الواضح أنه يصعب مقارنة الوسط الحسابي والانحراف المعياري للظاهرتين حيث أن وحدات القياس للأولى بالسنتيمتر ووحدات القياس للثانية بالكيلو جرام ، ولذلك يصعب على الباحثين اتخاذ قرار بشأن الظاهرتين سواء الطول أو الوزن . غير أنه من الواضح أن الانتشار النسبي للظاهرتين (معامل الاختلاف المعياري) يشير إلى تشتت الوزن بدرجة أكبر من تشتت الطول .

ويمكن تطبيق نفس الأسلوب إذا كانت بيانات الظاهرتين في شكل توزيعات تكرارية منتظمة أو غير منتظمة ، وبطبيعة الحال ستكون الفئات مختلفة تماما بين التوزيعين ولكن يستطيع الباحث في هذه الحالة إجراء المقارنة باستخدام التشتت النسبي مع مراعاة أنه سيتعامل مع مراكز الفئات والتكرارات في كلا التوزيعين .

وننوه في هذا المجال أن الدراسة والتحليل السابق ينصب كل اهتمامه على ظاهرة واحدة حتى لو تعددت الظواهر التي تجرى المقارنة بينها فإنه يتم قياس كل ظاهرة على حده بدون التعرض لأية علاقة تربط الظاهرتين ولذلك فإن المؤشرات الإحصائية السابق دراستها في مقاييس النزعة المركزية وغيرها سواء الوسط الحسابي أو الوسيط أو المنوال أو الانحراف المعياري والتباين ومعامل الاختلاف المعياري جميعها تركز على قياس سلوك أو اتجاه ظاهرة واحدة مهما كانت العلاقة بين الظواهر ومهما كانت وحدات القياس المستخدمة لكل منها ، غير أننا في كثير من المجالات نحتاج إلى تحديد العلاقة بين ظاهرتين ومدى تأثير كل منهما في الأخرى ، وهو ما نتعرض له في الفصول التالية :

مثـال (١١) :

إذا علمت أن س عدد ساعات التشغيل ، وأن ص عدد الوحدات المنتجة في أحد المصانع ، وقدمت إليك البيانات التالية :

مجـ س = ٧٥ ، مجـ ص = ٤٥٠ ، مجـ س ص = ٧٢٢٠

مجـ س^{٢}=١١٨٥، مجـ ص^{٢} =٤٠٥٠٠، مجـ (س-س/)^{٢}= ٦٠

مجـ (ص – صَ)^{٢} = ٤٠٠٠ ، ن = ٥

المطلوب :

١- إيجاد الوسط الحسابي للمتغيرين س ، ص .

٢- تحديد معامل الاختلاف المعياري للمتغيرين .

الحــل

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{\text{٧٥}}{\text{٥}} = \text{١٥}$$

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} = \frac{\text{٤٥٠}}{\text{٥}} = \text{٩٠}$$

$$\text{ع}_{\text{س}} = \sqrt{\frac{\text{مجـ س}^{\text{٢}}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{\text{٢}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{١١٨٥}}{\text{٥}} - \left(\frac{\text{٧٥}}{\text{٥}}\right)^{\text{٢}}} = \text{٣,٤٦٤}$$

$$\text{ع}_{\text{ص}} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ص}^{\text{٢}}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}\right)^{\text{٢}}}$$

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\text{٤٠٥٠٠}}{\text{٥}} - \left(\frac{\text{٤٥٠}}{\text{٥}}\right)^{\text{٢}}} = \text{صفر}$$

معامل الاختلاف المعياري لساعات العمل (س) :

$$= \frac{\text{ع}_{\text{س}}}{\bar{\text{س}}} \times \text{١٠٠} = \frac{\text{٣,٤٦٤}}{\text{١٥}} \times \text{١٠٠} = \text{٢٣,٠٩٣}\%$$

معامل الاختلاف المعياري لساعات العمل (ص) :

$$= \frac{\text{ع}_{\text{ص}}}{\bar{\text{ص}}} \times \text{١٠٠} = \frac{\text{صفر}}{\text{٩٠}} \times \text{١٠٠} = \text{صفر}\%$$

تطبيقات الفصل الأول

٥- قامت إدارة البحوث بمصانع الأذكياء بدراسة عدد العاملين (س) وعدد الوحدات المنتجة (ص) وقدمت إليك البيانات التالية :

مجـ س= ٢٠٠   مجـ س^{2} = ٤٢٩٠   مجـ ص^{2} = ٨١٤٩٢

مجـ (س–$\bar{س}$)= ٤٦   مجـ (س-س$^{/}$)^{2} = ٢٩٠   مجـ ص = ٩٠٠

مجـ (ص–$\bar{ص}$)= ٥٤ مجـ (ص-ص$^{/}$)^{2} = ٤٩٢ مجـ س ص= ١٨٣٤٦

ن = ١٠

والمطلـوب :

١- تحديد معامل الاختلاف المعياري لعدد العاملين (س) وكمية الإنتاج

٢- متوسط الانحرافات المطلقة للإنتاج (ص) وعدد العاملين

٦- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات مصروفات الدعاية والإعلان بالألف جنيه سنويا :

فئات المصروفات	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	مجموع
عدد الشركات	٦٥	٩٥	١٣٠	١٨٠	٥٥	٤٠	١٠	٥٧٥

والمطلوب :

١- إيجاد الانحراف المعيارى والتباين للمصروفات.

٢- تحديد معامل الاختلاف المعياري .

٣- تحديد نسبة الشركات التي تدفع ٥٥ ألف ج فأكثر .

٤- إيجاد المنوال بالحساب والرسم .

٥- تحديد الوسيط بالرسم فقط .

٦- تحديد قيمة الانحراف المتوسط لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

٧- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات الضرائب المدفوعة بالألف جنيه سنويا :

فئات الضريبة	١٢٠-	١٤٠-	١٥٠-	١٦٠-	١٧٠-	١٧٥-	١٨٠-١٨٥	مجموع
عدد الشركات	٩٠	١١٥	١٢٠	١٢٥	١٢٥	١٣	١٢	٦٠٠

والمطلوب :

(١) إيجاد معامل الاختلاف المعياري والتباين.

(٢) إيجاد المنوال بطريقتين مختلفتين .

(٣) تحديد قيمة الانحراف المتوسط لكل من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

٨- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات الأرباح المحققة بالألف جنيه شهريا :

ف	٤٠-	٦٠-	٨٠-	١٠٠-	١٢٠-
ك	١٢٥	١٨٥	٦٠	٢٠	١٠

والمطلوب :

١- إيجاد معامل الاختلاف المعياري للأرباح .

٢- تحديد متوسط الانحرافات المطلقة .

٣- إيجاد المنوال بطريقتين مختلفتين (الرسم والحساب) .

٤- إيجاد الوسيط بطريقتين (الرسم والحساب) .

الباب الثالث

الارتباط والانحدار

الفصل الأول : معامل الارتباط

الفصل الثانى : الانحدار الخطى

الفصـــل الأول

معامــل الارتبـــــاط

Correlation Coefficient

تتفاعل المتغيرات وتتداخل وتتشابك بحيث يصبح التأثير بينها متبادلا. وقد يكون التأثير المتداخل في اتجاه واحد الأمر الذي تعارف عليه الكتاب بأنه اتجاه طردي، كما قد يأخذ التأثير اتجاهات عكسية بحيث يتزايد أحد المتغيرات ويتناقص الآخر فتعرف العلاقة بينهما بأنها اتجاهات عكسية .

يفهم من ذلك أن الاتجاه الطردي يكون موجبا ، والاتجاه العكسي يكون سالبا. وقد يكون أحد الاتجاهين الطردي والعكسي ناتجا عن تأثير متبادل بين المتغيرات وقد ينتج عن تأثير قوى خارجية لا دخل لأحد المتغيرين في تأثيرها أو تفاعلها .

وتحدد العلاقة بين المتغيرين مدى الارتباط بينهما أو ما يمكن أن نطلق عليه الارتباط البسيط Simple Correlation فإذا زاد عدد المتغيرات يطلق على العلاقة بينها الارتباط المتعدد Multi correlation وسوف تقتصر الدراسة في هذا المجال على الارتباط البسيط .

وتهتم الدراسات في جميع فروع العلوم والمعرفة بتحديد العلاقة بين متغيرين أو أكثر ، ولا تقتصر على العلوم الإنسانية أو العلوم التطبيقية ، ولكن تحتاج جميع الدراسات إلى تحديد طبيعة ونوعية هذه العلاقة ومدى تأثيرها، ومن ثم تنبني عليها القرارات الإدارية . فقد يحتاج الباحث في العلوم العسكرية إلى تحديد العلاقة بين مدى الرصاص وشدة الإصابة أو العلاقة بين شدة الانفجار والتأثير النفسي ، كما يحتاج الباحث في العلوم الاقتصادية إلى تحديد العلاقة بين الطلب والسعر أو ما يسعي إليه الباحث في العلوم التجارية لتحديد العلاقة بين عدد العاملين وكمية الإنتاج أو تحديد العلاقة بين نفقات الإعلان والمبيعات وقد يحتاج الباحث في العلوم الزراعية إلي تحديد العلاقة بين كمية الأسمدة وكمية المحصول ، ويحتاج الباحث في العلوم الطبية إلى تحديد كمية الدواء والأثر الطبي الناتج عن العلاج. وهكذا في جميع مجالات العلوم نحتاج دائما إلى تحديد طبيعة ونوعية العلاقة بين متغيرين أو ما يطلق عليه الارتباط .

وتهتم دراسة الارتباط بتحديد العلاقة بين متغيرين دون التطرق إلى معرفة التأثير المتبادل بينهما سلبا أو إيجابا وسواء كان التأثير ناتجا عن قوى داخلية أو خارجية . وتسعى الدراسة إلى تحديد العلاقة واتجاهها سلبا أو إيجابا .

فإذا كانت العلاقة بين المتغيرين تأخذ اتجاها متزايدا يطلق عليها ارتباط طردي موجب . وتنتج عن أن تزايد أحد المتغيرين يصاحبه زيادة في المتغير الآخر، وتتوقف العلاقة الطردية على مقدار معدل التزايد ، أما إذا كان تزايد أحد المتغيرين يصاحبه تناقص المتغير الآخر فإن العلاقة يطلق عليها ارتباط عكسي وتتوقف درجة الارتباط أيضا على معدل زيادة أحد المتغيرين ومعدل تناقص المتغير الآخر .

فإذا تطابق معدل الزيادة في الاتجاه الموجب يقال أنها علاقة **ارتباط طردي تام** ، والعكس صحيح إذا تطابق معدل الزيادة ومعدل التناقص يطلق على العلاقة **ارتباط عكسي تام** ، ويمكن أن نصادف انعدام العلاقة بين المتغيرين وفي هذه الحالة ينعدم الارتباط بين المتغيرين .

ونظرا لأن الدراسة في هذا المجال تهتم بتحديد العلاقة بين متغيرين فإنه يمكن أن نرمز لمفردات أحد المتغيرين بالرمز (س) بحيث تصبح المفردات $س_{١}$، $س_{٢}$، $س_{٣}$ ، ....، .... ، $س_{ن}$ كما نرمز لمفردات المتغير الآخر بالرمز (ص) بحيث تصبح المفردات $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ ، $ص_{٣}$ ، ... ، ... ، $ص_{ن}$.

ونرمز للعلاقة بين المتغيرين أو ما يسمي بالارتباط بالرمز (ر) ويمكن تحديد العلاقة المشار إليها من المفردات للمتغيرين أو من التوزيعات التكرارية . وننوه في هذا الصدد أن التوزيعات تتم وفق متغيرين وليس متغيراً واحداً ومن ثم يطلق عليها التوزيعات التكرارية المزدوجة .

أولا : تحديد الارتباط من المفردات :

معامل ارتباط بيرسون : Correlation CoefficientPearson

إذا توافر لدينا معلومات عن مفردات متغيرين (س ، ص) بحيث يكون عدد المفردات متساويا من الناحية العددية ونرمز له بالرمز (ن) فإن معادلة الارتباط تأخذ الشكل التالي :

$$ر = \frac{ن \text{ مجـ } س ص - \text{مجـ } س \times \text{مجـ } ص}{\sqrt{[ن \text{ مجـ } س^{٢} - (\text{مجـ } س)^{٢}] \; [ن \text{ مجـ } ص^{٢} - (\text{مجـ } ص)^{٢}]}}$$

وتسمى العلاقة " معامل ارتباط بيروسون" إشارة إلى الشخص الذي اكتشف هذه العلاقة وتوصل إلى المعادلة ، ويمكن الوصول إلى عدة أشكال للمعادلة السابقة بالقسمة على معامل معين أو نحو ذلك غير أن النتيجة تكون واحدة ولذا سوف نكتفي بالشكل المشار إليه .

ويجب أن يتنبه الباحثون والدارسون إلى أن العلاقة المشار إليها رغم أنها تعرف (بالارتباط الخطي) غير أن العلاقة الخطية ناشئة عن توفيق شكل الانتشار ، ويصعب أن تكون العلاقات خطية تماما لأنها تعتمد على موضع نقاط العلاقة لكل قيمتين متناظرتين من قيم المتغيرين . ونظرا لأن كل نقطة تحدد بقيمة المتغيرين س ، ص فإن وضع جميع النقاط على رسم بياني يحدد شكل واتجاه الانتشار ، ويتم توفيق خط مستقيم يترك مجموعة نقاط أعلاه ومجموعة أخرى أسفله وبطبيعة الحال قد تقع بعض النقاط على الخط.

مثال (١) :

فيما يلي بيان بالدرجات التي حصل عليها مجموعة طلاب في امتحان مادتي الرياضة (س) واللغات (ص) :

س	١٨	١٢	٢٠	١٥	١٧	٣	١٤	١٩
ص	١٠	١٥	١٢	٧	١٦	١١	١٥	١٣

احسب معامل الارتباط الخطي بين الدرجات .

الحـــل

س	ص	س ص	$س^2$	$ص^2$
١٨	١٠	١٨٠	٣٢٤	١٠٠
١٢	١٥	١٨٠	١٤٤	٢٢٥
٢٠	١٢	٢٤٠	٤٠٠	١٤٤
١٥	٧	١٠٥	٢٢٥	٠٤٩
١٧	١٦	٢٧٢	٢٨٩	٢٥٦
٣	١١	٣٣	٠٠٩	١٢١
١٤	١٥	٢١٠	١٩٦	٢٢٥
١٩	١٣	٢٤٧	٣٦١	١٦٩
١١٨	٩٩	١٤٦٧	١٩٤٨	١٢٨٩

ن = عدد المفردات = ٨

$$ر = \frac{\text{ن مجـ س ص – مجـ س × مجـ ص}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^2 – (\text{مجـ س})^2]\,[\text{ن مجـ ص}^2 – (\text{مجـ ص})^2]}}$$

$$\text{ر} = \sqrt{\frac{\text{٨} \times \text{١٤٦٧} - \text{١١٨} \times \text{٩٩}}{[\text{٨} \times \text{١٩٤٨} - (\text{١١٨})^{\text{٢}}]\,[\text{٨} \times \text{١٢٨٩} - (\text{٩٩})^{\text{٢}}]}}$$

$$\text{ر} = \frac{\text{٥٤}}{\text{٩٢١.٠١}} = \text{٠.٠٥٩}$$

مثـال (٢) :

فيما يلي بيان بعدد العاملين (س) وكمية الإنتاج بالوحدة (ص) :

عدد العاملين	١٠	١٢	١٥	١٧	٢١	٢٥	٣٠
كمية الإنتاج	١٠٠	١١٠	١٢٥	١٣٠	١٣٥	١٤٥	١٦٠

والمطلوب : تحديد معامل الارتباط بين عدد العاملين وكمية الإنتاج .

الحـــل

س	ص	س ص	$\text{س}^{\text{٢}}$	$\text{ص}^{\text{٢}}$
١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠	١٠٠٠٠
١٢	١١٠	١٣٢٠	١٤٤	١٢١٠٠
١٥	١٢٥	١٨٧٥	٢٢٥	١٥٦٢٥
١٧	١٣٠	٢٢١٠	٢٨٩	١٦٩٠٠
٢١	١٣٥٤	٢٨٣٥	٤٤١	١٨٢٢٥
٢٥	١٤٥	٣٦٢٥	٦٢٥	٢١٠٢٥
٣٠	١٦٠	٤٨٠٠	٩٠٠	٢٥٦٠٠
١٣٠	٩٠٥	١٧٦٦٥	٢٧٢٤	١١٩٤٧٥

ن = ٧

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^{\text{٢}} - (\text{مجـ س})^{\text{٢}}]\,[\text{ن مجـ ص}^{\text{٢}} - (\text{مجـ ص})^{\text{٢}}]}}$$

$$ر = \frac{٧ \times ١٧٦٦٥ - ١٣٠ \times ٩٠٥}{\sqrt{[٧ \times ٢٧٢٤ - (١٣٠)^{٢}][٧ \times ١١٩٤٧٥ - (٩٠٥)^{٢}]}}$$

$$ر = \frac{٦٠٠٥}{٦١٢٤.٢٥} = ٠.٩٨١$$

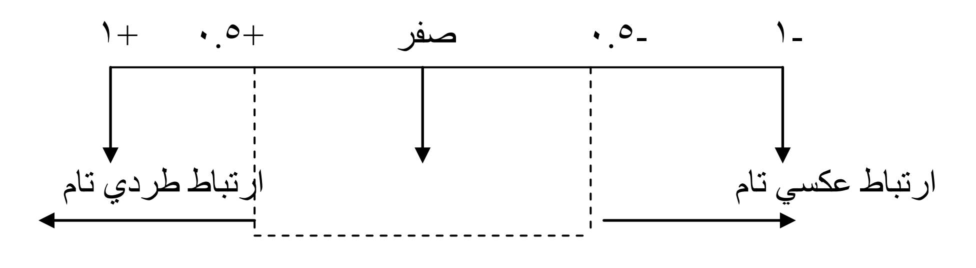
ملاحظـات :

- يلاحظ من النتائج السابق الحصول عليها في مثال ١ ، ٢ أن قيمة الارتباط كسر
- كمـا يلاحـظ أن قيمـة الارتبـاط فـي المثـال الأول = ٠.٠٥٩ وقيمـة الارتبـاط فـي المثـال الثاني = ٠.٩٨١ .

ولعـل هـذه النتـائج تقودنـا إلـى توضـيح بعـض الحقـائق والصـفات المتعلقـة بالارتبـاط نوجزها فيما يلي :

- معامل الارتباط كسر حقيقي يتراوح بين الصفر ، $\pm$ ١ .
- يمكن أن يصل معامل الارتباط إلى الواحد الصحيح الموجب وهنا يطلق علي العلاقة بين المتغيرين أنها علاقة ارتباط طردي تام.
- يمكن أن يصـل معامـل الارتبـاط إلـى الواحـد الصـحيح بإشـارة سـالبة وهنـا يطلـق علـى العلاقة ارتباط عكسي تام .
- يمكن أن يصل معامل الارتباط إلى الصفر وفي هذه الحالة يقال أنـه لا توجد علاقـة بـين المتغيرين .
- يمكن أن تكون قيمة معامل الارتبـاط كسر حقيقـي موجب أو سـالب وتقترب هذه القيمـة من الصفر فيقال أنه ارتباط ضعيف .
- يمكن أن تكـون قيمـة معامـل الارتبـاط كسـر حقيقـي موجـب أو سـالب ولكنهـا تقتـرب مـن الواحد فيقال إنه ارتباط قوى .

ويمكن توضيح ما سبق كما يلي :



ارتباط عكسي قوى   ارتباط ضعيف   ارتباط طردي قوى

<u>ثانيا : إيجاد معامل الارتباط من البيانات المبوبة (التوزيع المزدوج):</u>

يمكن تحديد معامل الارتباط من البيانات المبوبة في صورة توزيعات تكرارية مزدوجة بحسب فئات متغيرين ، وتستخدم المعادلة :

$$\text{ر} = \frac{\text{مجـ ك حس حص} - \dfrac{\text{مجـ ك حس} \times \text{مجـ ك حص}}{\text{مجـ ك}}}{\sqrt{\left[\text{مجـ ك ح}^2\text{س} - \dfrac{(\text{مجـ ك حس})^2}{\text{مجـ ك}}\right]\left[\text{مجـ ك ح}^2\text{ص} - \dfrac{(\text{مجـ ك حص})^2}{\text{مجـ ك}}\right]}}$$

مثال (٣) :

فيما يلي توزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات مدة الخدمة (س) وفئات الأجر الشهري بالجنيه (ص) :

ف س / ف ص	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-٣٥	مجموع
١٥٠-	٤	٣	١	١	٠	٠	٩
١٧٠-	٣	٣	٢	١	١	٠	١٠
١٩٠-	٢	٣	٤	٣	١	١	١٤
٢١٠-	٠	١	٣	٥	٤	١	١٤
٢٣٠-	٠	٠	٢	٣	٦	٢	١٣
٢٥٠-٢٧٠	٠	٠	١	٤	٦	٥	١٦
مجموع	٩	١٠	١٣	١٧	١٨	٩	٧٦

والمطلوب :

تحديد معامل الارتباط بين مدة الخدمة والأجر .

الحــــل

خطوات الحل :

- إعداد جدول توزيع تكراري بسيط للمتغير س .
- إعداد جدول توزيع تكراري بسيط للمتغير ص .
- إعداد جدول مزدوج بحسب الانحرافات المختزلة .

جدول هامشى للمتغير س

فـس	ك	س	حس	حس	ك حس	ك ح^٢س
٥-	٩	٧.٥	١٠-	٢-	١٨-	٣٦
١٠-	١٠	١٢.٥	٥-	١-	١٠-	١٠
١٥-	١٣	(١٧.٥)	٠	٠	٠	٠
٢٠-	١٧	٢٢.٥	٥	١	١٧	١٧
٢٥-	١٨	٢٧.٥	١٠	٢	٣٦	٧٢
٣٠-٣٥	٩	٣٢.٥	١٥	٣	٢٧	٨١
مجموع	٧٦				٥٢	٢١٦

جدول هامشى للمتغير ص

فـص	ك	س	حص	حص	ك حص	ك ح^٢ص
١٥٠-	٩	١٦٠	٤٠-	٢-	١٨-	٣٦
١٧٠-	١٠	١٨٠	٢٠-	١-	١٠-	١٠
١٩٠-	١٤	(٢٠٠)	٠	٠	٠	٠
٢١٠-	١٤	٢٢٠	٢٠	١	١٤	١٤
٢٣٠-	١٣	٢٤٠	٤٠	٢	٢٦	٥٢
٢٥٠-٢٧٠	١٦	٢٦٠	٦٠	٣	٤٨	١٤٤
مجموع	٧٦				٦٠	٢٥٦

الجدول المزدوج

حص \ حس	-٢	-١	٠	١	٢	٣	مجموع
-٢	٤ (١٦)	٣ (٦)	١ (٠)	١ (-٢)	٠ (٠)	٠ (٠)	٩ (٢٠)
-١	٣ (٦)	٣ (٣)	٢ (٠)	١ (-١)	١ (-٢)	٠ (٠)	١٠ (٦)
٠	٢ (٠)	٣ (٠)	٤ (٠)	٣ (٠)	١ (٠)	١ (٠)	١٤ (٠)
١	٠ (٠)	١ (-١)	٣ (٠)	٥ (٥)	٤ (٨)	١ (٣)	١٤ (١٥)
٢	٠ (٠)	٠ (٠)	٢ (٠)	٣ (٦)	٦ (٢٤)	٢ (١٢)	١٣ (٤٢)
٣	٠ (٠)	٠ (٠)	١ (٠)	٤ (١٢)	٦ (٣٦)	٥ (٤٥)	١٦ (٩٣)
المجموع	٩ (٢٢)	١٠ (٨)	١٣ (٠)	١٧ (٢٠)	١٨ (٦٦)	٩ (٦٠)	٧٦ (١٧٦)

$$ر = \frac{\text{مجـ ك حس حص} - \frac{\text{مجـ ك حس} \times \text{مجـ ك حص}}{\text{مجـ ك}}}{\sqrt{\left[\text{مجـ ك ح}^{2}\text{س} - \frac{(\text{مجـ ك حس})^{2}}{\text{مجـ ك}}\right]\left[\text{مجـ ك ح}^{2}\text{ص} - \frac{(\text{مجـ ك حص})^{2}}{\text{مجـ ك}}\right]}}$$

$$ر = \frac{٧١٧٦ - \frac{٥٢ \times ٦٠}{٧٦}}{\sqrt{\left[٢١٦ - \frac{(٥٢)^{2}}{٧٦}\right]\left[٢٥٦ - \frac{(٦٠)^{2}}{٧٦}\right]}} = ٠,٦٩٦$$

معامل ارتباط الرتب

(معامل ارتباط سبيرمان)

Coefficient Spearman Correlation

تهدف دراسة معامل ارتباط الرتب أو ما يسمي بمعامل ارتباط سبيرمان إلى إمكانية تحديد العلاقة بين متغيرين سواء كانت البيانات في صورة كمية أو في صورة وصفية أو نوعية .

ويختلف معامل ارتباط سبيرمان في ذلك عن معامل ارتباط بيرسون السابق دراسته والذي يعتمد أساسا على أن تكون البيانات في صورة كمية فقط. وتأسيسا على ذلك لا يمكن استخدام معامل ارتباط بيرسون إذا كانت البيانات لها قياسات غير كمية مثل درجة التعليم والتي يطلق عليها تعليم أعلى من الجامعة، ماجستير أو دكتوراه ، تعليم جامعي تعليم متوسط (الثانوية العامة وما في مستواها)، تعليم أقل من المتوسط .

وقد تكون البيانات عن درجة إجادة لغة من اللغات أو القراءة والكتابة كأن يقال يقرأ فقط ، يقرأ او يكتب ، أمي وهكذا .. وقد تكون البيانات عن تقديرات الطلاب : ممتاز ، جيد جدا ، جيد ، مقبول ، ضعيف ، ضعيف جدا.

وقد حاول معامل سبيرمان حل هذه المشكلة سواء كانت البيانات كمية أو نوعية (وصفية). فإذا كان لدينا مجموعة مشاهدات أو بيانات لمتغيرين وعدد المشاهدات (ن) للمتغيرين يتم اتخاذ مجموعة خطوات كما يلي :

١- ترتيب مفردات المتغير الأول تصاعديا أو تنازليا .

٢- ترتب مفردات المتغير الثاني تصاعديا أو تنازليا كما تم أساسا في المتغير الأول .

٣- توضع درجة الترتيب لكل متغير ١ ، ٢، ٣، ...، ... ، ن

٤- تحسب الفروق بين رتب المتغيرين ونرمز لها بالرمز (ف).

٥- تحسب مربعات الفروق ($ف^{٢}$) ونوجد مجموعها .

٦- إذا تصادف وحصلت مفردتين على نفس الدرجة يؤخذ متوسط الرتب وهكذا .

٧- تطبق معادلة معامل سبيرمان كما يلي :

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}_{ر}}{ن (ن^{٢}-١)}$$

مثـال (٤) :

فيما يلي تقديرات مجموعة من الطلاب في امتحان مادتي الرياضة واللغات :

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
تقدير الرياضة	ممتاز	ضعيف	جيد جدا	مقبول	ضعيف جدا	ممتاز	جيد	مقبول
تقدير اللغة	جيد	مقبول	ممتاز	ضعيف	جيد	جيد جدا	مقبول	مقبول

والمطلوب : حساب معامل ارتباط سبيرمان لتقديرات المادتين .

الحــل

تقدير الرياضة	تقدير اللغة	رتب الرياضة	رتب اللغة	ف	$ف^2$
ممتاز	جيد	١.٥	٣.٥	-٢	٤.٠٠
ضعيف	مقبول	٧.٠	٦.٠	١.٠	١.٠٠
جيد جدا	ممتاز	٣.٠	١.٠	٢.٠	٤.٠٠
مقبول	ضعيف	٥.٥	٨.٠	-٢.٥	٦.٢٥
ضعيف جدا	جيد	٨.٠	٣.٥	٤.٥	٢٠.٢٥
ممتاز	جيد جدا	١.٥	٢.٠	-٠.٥	٠.٢٥
جيد	مقبول	٤.٠	٦.٠	-٢	٤.٠٠
مقبول	مقبول	٥.٥	٦.٠	-٠.٥	٠.٢٥
				صفر	٤٠.٠٠

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^2}{ن(ن^2 - ١)}$$

$$ر = ١ - \frac{٦ \times ٤٠}{٨ (٦٤ - ١)} = ١ - \frac{٢٤٠}{٥٠٤} = ٠.٥٢٤$$

ملاحظات :

* عند تكرار التقدير لأكثر من طالب تحسب الترتيبات الخاصة بهم ويؤخذ المتوسط ، ولتوضيح ذلك نجد أن في مادة اللغة الطلاب رقم ٢، ٧، ٨ حصلوا على تقدير مقبول وعند ترتيب تقديرات اللغة نجد أنهم في ترتيب ٥، ٦، ٧ ولذلك يكون ترتيبهم = $\frac{٥+٦+٧}{٣}$

$= \frac{١٨}{٣} = ٦$

* نجد أيضا في تقديرات مادة اللغة الطالبين رقمي ١، ٥ حصلا على تقدير جيد وترتيبهم ٣، ٤ ولذلك يكون متوسط التقدير :

$$= \frac{٣+٤}{٢} = \frac{٧}{٢} = ٣.٥$$

* وعند ترتيب تقديرات الرياضة نجد أن طالبين حصلا على تقدير ممتاز وهما الطالب رقم (١) والطالب رقم (٦) . وعند الترتيب يكون ترتيبهما ١، ٢ وبذلك يكون المتوسط $= \frac{١+٢}{٢} = ١.٥$ ويأتي بعدهما الطالب رقم ٣ ويكون ترتيبه الثالث . وهكذا .

* يلاحظ أن مجـ ف = صفر .

مثـال (٥) :

فيما يلي الدرجات التي حصل عليها مجموعة من الطلاب في امتحان مادتي المحاسبة (س) والإدارة (ص) :

محاسبة (س)	١١	١٦	١٠	١٥	١٤	١٥	١٨
إدارة (ص)	١٢	١٣	١٥	١٣	١١	١٢	١٤

والمطلوب : حساب معامل ارتباط سبيرمان (معامل ارتباط الرتب)

الحـــل

محاسبة س	إدارة ص	رتب س	رتب ص	ف	ف^{٢}
١١	١٢	٦	٥.٥	٠.٥	٠.٢٥
١٦	١٣	٢	٣.٥	١.٥-	٢.٢٥
١٠	١٥	٧	١	٦	٣٦.٠٠
١٥	١٣	٣.٥	٣.٥	٠	٠
١٤	١١	٥	٧	٢-	٤.٠٠
١٥	١٢	٣.٥	٥.٥	٢-	٤.٠٠
١٨	١٤	١	٢	١-	١.٠٠
				صفر	٤٧.٥٠

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن (ن^{٢} - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ \times ٤٧.٥}{٧ (٤٩ - ١)} = ٠.٨٤٨.$$

أوضحت الدراسة السابقة أن معامل ارتباط سبيرمان يمكن الاعتماد عليه لتحديد العلاقة بين متغيرين سواء كانت البيانات في صورة وصفية او في صورة كمية . وننوه في هذا الصدد إلى عدم المقارنة بين نتائج معامل سبيرمان ومعامل ارتباط بيرسون في حالة البيانات الكمية ، حتى لو أدت الصدفة إلى تقارب النتائج أو تعادلها فإن ذلك لا يمكن الاستنتاج منه أن هناك أي تشابه بين المعاملين . ولتأكيد ذلك يمكن إيجاد معامل ارتباط بيرسون في المثال (٦) كما يلي :

س	ص	س ص	$\text{س}^{٢}$	$\text{ص}^{٢}$
١١	١٢	١٣٢	١٢١	١٤٤
١٦	١٣	٢٠٨	٢٥٦	١٦٩
١٠	١٥	١٥٠	١٠٠	٢٢٥
١٥	١٣	١٩٥	٢٢٥	١٦٩
١٤	١١	١٥٤	١٩٦	١٢١
١٥	١٢	١٨٠	٢٢٥	١٤٤
١٨	١٤	٢٥٢	٣٢٤	١٩٦
٩٩	٩	١٢٧١	١٤٤٧	١١٦٨

ن = ٧

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص – مجـ س × مجـ ص}}{\sqrt{[\,(\text{ن مجـ س}^{٢} – (\text{مجـ س})^{٢}]\;[\,\text{ن مجـ ص}^{٢} – (\text{مجـ ص})^{٢}\,]}}$$

$$\text{ر} = \frac{\text{١ × ١٢٧١ - ٩٩ × ٩٠}}{\sqrt{[\,(\text{٧ × ١٤٤٧ – (٩٩)}^{٢}]\;[\,\text{٧ × ١١٦٨ –(٩٠)}^{٢}\,]}}$$

ر = ٠,٠٨٢٤

مثـال (٧)

فيما يلي التقديرات التي حصل عليها مجموعة طلاب في امتحان مـادة الإحصـاء (س) ومادة اللغة (ص) :

إحصاء	حـ	م	أ	ض حـ	أ	م	حـ حـ	ض
لغة	م	حـ	حـ حـ	حـ	حـ حـ	ض	ض حـ	حـ

والمطلوب :

إيجاد معامل ارتباط الرتب (معامل ارتباط سبيرمان) بين الدرجات .

الحـل

احصاء س	لغة ص	رتب س	رتب س	ف ر	$ف_ر^2$
حـ	م	٤	٦	ـ ٢	٤
م	حـ حـ	٥.٥	١.٥	٤	١٦
أ	حـ	١.٥	٤	ـ ٢٠٥	٦.٢٥
ض حـ	حـ	٨	٤	٤	١٦
أ	حـ حـ	١.٥	١.٥	صفر	٠
م	ض	٥.٥	٧	ـ ١.٥	٢.٢٥
حـ حـ	ض حـ	٣	٨	ـ ٥	٢٥
ض	حـ	٧	٤	٣	٩
-	-	-	-	-	٧٨.٥

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف_ر^2}{ن(ن^2 - ١)}$$

$$ر = ١ - \frac{٦ \times ٧٨.٥}{٨ (٦٤-١)} = ٠.٠٦٥$$

تطبيقـات الفصل الأول

١- فيما يلي بيـان بالـدرجات التـي حصـل عليهـا مجموعـة مـن الطـلاب فـي امتحـان مـادة الإدارة (س) ومادة الرياضة (ص) :

درجة الإدارة	١٢	٩	١٥	١٠	٦	١٤	١١
درجة الرياضة	١٨	٢٠	١٦	١٧	١٢	١٥	١٣

احسب معامل الارتباط الخطي (بيرسون) بين درجات الإدارة ودرجات الرياضة .

٢- فيمـا يلـي توزيـع مجموعـة مـن الشـركات بحسـب فئـات الأربـاح (س) وفئـات المبيعات (ص) القيمة بالألف جنيه :

ف س / ف ص	٢٠٠-	٢١٠-	٢٢٠-	٢٣٠-	٢٤٠-	٢٥٠-	٢٦٠-
٢٠-	٢	٣	٥	٢	١	٠	٠
٣٠-	١	٢	٤	٣	٢	٢	٠
٤٠-	١	٢	٣	٤	٢	١	١
٥٠-	١	١	٢	٥	٤	٣	٢
٦٠-	٠	١	١	٥	٦	٢	٢
٧٠-	٠	١	١	٢	٨	٢	٢
٨٠-	٠	٠	١	١	٣	٢	١

والمطلوب :

١- إيجاد معامل الارتباط البسيط (بيرسون) بين الأرباح والمبيعات .

٢- إيجاد معامل الاختلاف المعياري للمبيعات .

٣- إيجاد المنوال للأرباح بالحساب والرسم .

٤- تحديد قيمة الانحراف المتوسط للوسط الحسابي والمنوال .

٣- فيما يلي توزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات الأجر الشهري بالجنيه (ص) وفئات مدة الخدمة بالسنة (س) :

ف س / ف ص	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-
٢٠٠-	٤	٥	٣	٢	١	٠	٠
٢٢٠-	٣	٤	٥	٥	٢	١	٠
٢٤٠-	٢	٣	٥	٧	٣	٢	١
٢٦٠-	١	٤	٧	٨	٥	٢	١
٢٨٠-	٠	٢	٥	٩	٩	٣	٢
٣٠٠-	٠	٠	١	٧	١٥	٥	٢

والمطلوب :

١- إيجاد معامل الارتباط بين الأجر ومدة الخدمة .

٢- تحديد الوسيط للأجر بالحساب والرسم .

٣- تحديد المنوال لمدة الخدمة بالحساب والرسم .

٤- إيجاد قيمة الانحراف المتوسط للأجور لكل من الوسط الحسابي والوسيط.

٥- إيجاد معامل الاختلاف المعياري والتباين للأجور .

٥- فيما يلي توزيع مجموعة من الشركات بحسب فئات المبيعات (س) وفئات الأرباح المحققة (ص) ، القيمة بالألف جنيه :

ف س / ف ص	-١٠٠	-١١٠	-١٢٠	-١٣٠	-١٤٠	-١٥٠	-١٦٠
-١٠	٢	٢	١	١	٠	٠	٠
-٢٠	٢	٣	٤	١	١	١	٠
-٣٠	١	٢	٣	٤	٥	٢	١
-٤٠	٠	٠	٢	٣	٤	٥	٦

والمطلوب :

١- إيجاد معامل الارتباط بين المبيعات والأرباح .

٢- تحديد معامل الاختلاف المعياري للأرباح والتباين .

٣- تحديد قيمة الانحراف المتوسط للأرباح لكل من الوسط الحسابي والمنوال

٤- إيجاد الوسيط للمبيعات .

٥- تحديد نسبة الشركات إلى تحقق مبيعات ١٣٨ ألف جنيه فأكثر .

٥- فيما يلي توزيع مجموعة من العاملين بحسب فئات مدة الخدمة (ص) وفئات الأجر الشهري (س) :

ف س / ف ص	-١٥٠	-١٦٠	-١٧٠	-١٨٠	-١٩٠	-٢٠٠	**المجموع**
-٤	٢	١	١	١	٠	٠	٥
-٨	١	٢	٢	١	١	٠	٧
-١٢	٠	٢	٢	٣	١	٠	٨
-١٦	٠	١	٢	٣	٣	١	١٠
-٢٠	٠	٠	٢	٣	٣	٢	١٠
٢٥-٣٠	٠	٠	١	٣	٤	٣	١١
المجموع	٣	٦	١٠	١٤	١٢	٦	٥١

والمطلوب :

١- إيجاد معامل الارتباط بين الأجر ومدة الخدمة .

٢- إيجاد المنوال لمدة الخدمة بالحساب والرسم .

٣- تحديد نسبة العمال الذين يحصلون على أجر ١٧٥ ج فأكثر .

٤- تحديد معامل الاختلاف المعياري لمدة الخدمة .

الفصـــــل الثانى
الانحدار الخطـى
Regression

تهدف دراسة الانحدار الخطي إلى تحديد العلاقة السببية بين متغيرين، بمعني أن أحد المتغيرين يطلق عليه المتغير المستقل ونرمز له بالرمز (س) والمتغير الآخر يطلق عليه المتغير التابع ونرمز له بالرمز (ص) . ويقصد بذلك أن المتغير المستقل يكون خارج إطار السيطرة ولكن تغيره يمكن أن يحدث تغيرا أو يترك أثرا في المتغير الآخر ويتضح ذلك في دراسة العلاقة بين السن والوزن أو السن والطول أو العلاقة بين مدة الخدمة والأجر الشهري ...

وتتحدد العلاقة بين المتغيرين في صورة خطية يطلق عليها معادلة الخط المستقيم ، وهذه المعادلة من أكثر المؤشرات الرياضية والإحصائية استخداما نظرا لإمكانية تطويعها للتنبؤ باتجاه الظاهرة موضع الدراسة بجانب سهولة تطبيقها .

ويمكن تطبيق المعادلة المشار إليها إذا توافرت لدينا مجموعة بيانات تاريخية عن المتغيرين، كما يمكن تطبيقها في دراسة ظاهرة معينة خلال سلسلة زمنية مقومة بالسنوات أو الشهور أو الأسابيع أو الأيام، وفي هذه الحالة تعتبر السلسلة الزمنية هي المتغير المستقل (س) على أن تكون الظاهرة محل الدراسة هي المتغير التابع (ص) . .

ولتحديد العلاقة بين المتغيرين في حالة السلاسل الزمنية تؤخذ إحدى فترات السلسلة وتعتبر فترة الأساس أو الفترة القياسية وترتب باقي الفترات سلبا أو إيجابا بالنسبة لها ، ويجب أن يتنبه الباحثون والدارسون في هذا المجال إلى كيفية اختيار فترة الأساس حتى لو كانت السلسلة الزمنية بالسنوات ومن الخطأ أن يؤخذ التاريخ السنوى على أنه رقما كميا ولكننا نعتبره بيانا وصفيا ويجب تحويله إلى متغير كمي عن طريق الترتيب المقارن المشار إليه . وعموما تأخذ المعادلة الصورة التالية :

$$ص = م س + ح$$

حيـث :

ص متغير تابع يرمز للظاهرة موضع الدراسة .

س متغير مستقل يعبر عن الزمن .

م هي معامل (س) وتعبر عن ميل الخط المستقيم أو ظل الزاوية التي يصنعها الخط المستقيم مع المحور الأفقي .

حـ هي ثابت المعادلة وتمثل الجزء المقطوع من المحور الرأسي

وتصبح المشكلة هي تحديد قيمة الثوابت (م ، حـ) ويمكن تحديدهما كما يلي :

$$\text{م} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{2} - (\text{مجـ س})^{2}}$$

$$\text{حـ} = \overline{\text{ص}} - \text{م}\ \overline{\text{س}}$$

وغير خاف أن تحديد قيمة (حـ) يتوقف على إيجاد قيمة (م) أولا ، كما أن ($\overline{\text{ص}}$)هي الوسط الحسابي للمتغير (ص) وايضا ($\overline{\text{س}}$) هي الوسط الحسابي للمتغير ($\overline{\text{س}}$) .

مثـال (١) :

فيما يلي بيان بالمبيعات (س) لأحد محلات التجزئة ، والأرباح المحققة (ص) ، القيمة بالألف جنيه :

المبيعات (س)	١٢٠	١٣٠	١٥٠	١٦٠	١٩٠	٢٠٠	٢٣٠
الأرباح (ص)	١٥	١٧	٢٢	٢٨	٤٠	٥٢	٧٠

وبفرض أن العلاقة بين المبيعات والأرباح هي علاقة خطية (معادلة خط مستقيم)،المطلوب :

١- تحديد معادلة الخط المستقيم
٢- تحديد الأرباح (ص) عندما تصل المبيعات ٢٥٠ ألف جنيه.
٣- تقدير الأرباح عندما يكون حجم المبيعات ١٧٠ ألف جنيه .
٤- بفرض أن إدارة المحل تهدف إلى تحقيق ربحا ٨٠ ألف جنيه فما هي قيمة المبيعات التي يجب الوصول إليها لتحقيق هذا الربح؟

الحـــل

س	ص	س ص	$س^{٢}$
١٢٠	١٥	١٨٠٠	١٤٤٠٠
١٣٠	١٧	٢٢١٠	١٦٩٠٠
١٥٠	٢٢	٣٣٠٠	٢٢٥٠٠
١٦٠	٢٨	٤٤٨٠	٢٥٦٠٠
١٩٠	٤٠	٧٦٠٠	٣٦١٠٠
٢٠٠	٥٢	١٠٤٠٠	٤٠٠٠٠
٢٣٠	٧٠	١٦١٠٠	٥٢٩٠٠
١١٨٠	٢٤٤	٤٥٨٩٠	٢٠٨٤٠٠

١- تحديد المعادلـة :   ن = ٧

$$م = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - مجـ\ س \times مجـ\ ص}{ن\ مجـ\ س^{٢} - (مجـ\ س)^{٢}}$$

$$م = \frac{٧ \times ٤٥٨٩٠ - ١١٨٠ \times ٢٤٤}{٧ \times ٢٠٨٤٠٠ - (١١٨٠)^{٢}} = ٠.٥٠٢$$

$$حـ = \bar{ص} - م\ \bar{س}$$

$$حـ = \frac{مجـ\ ص}{ن} - م \times \frac{مجـ\ س}{ن}$$

جـ = $\frac{٢٤٤}{٧}$ - ٠.٥٠٢ × $\frac{١١٨٠}{٧}$ =٤٩.٧٦٦

ص = ٠.٥٠٢ س - ٤٩.٧٦٦

٢- تقدير الأرباح عندما س = ٢٥٠ بالتعويض في المعادلة :

ص = ٠.٥٠٢ × ٢٥٠ – ٤٩.٧٦٦ = ٧٥.٧٣٤ ألف جنيه

٣- تقدير الأرباح (ص) عندما س = ١٧٠ :

ص = ٠.٥٠٢ × ١٧٠ – ٤٩.٧٦٦ = ٣٥.٥٧٤ ألف جنيه

٤- رقم المبيعات (س) المطلوب لتحقيق ربحا (ص) = ٨٠ ألف ج

٨٠ = ٠.٥٠٢ س – ٤٩.٧٦٦

٠.٥٠٢ س = ٨٠ + ٤٩.٧٦٦ = ١٢٩.٧٦٦

حجم المبيعات (س) = ١٢٩٧٦٦ جنيه .

استنتاجات هامة :

يجب أن يتنبه الباحثون والدارسون إلى أن الظواهر عموما يصعب أن تأخذ شكل خط مستقيم بمعني أن أزواج النقط من الضروري أن تقع على نفس الخط الذي يمثل المعادلة ولكنها تأخذ شكل انتشار ، وبتوفيق خط مستقيم يتوسط شكل الانتشار يكون هو الخط الذي يمثل المعادلة المشار إليها.

وبطبيعة الحال فإن توفيق خط مستقيم يتوسط شكل الانتشار من الضروري أن تقع بعض النقاط أعلي الخط المستقيم ويقع البعض الآخر أسفل الخط المستقيم كما يمكن أن نجد أن بعض النقاط قد يمر بها الخط المستقيم.

ونخلص من ذلك أن المعادلة تكون تقريبية وتستخدم للتقدير أو التوقع وليست تحديدية . ومثال ذلك لاحظنا أن جميع القيم المعطاة (وهي قيم فعلية) ليس بها كسور بينما النتائج التي حصلنا عليها بها كسور. كما أننا إذا أردنا اختيار قيمة من الأرقام الفعلية الواردة بالجدول من قيم س أو ص وأردنا تطبيق المعادلة وصولا إلى القيمة المناظرة فقد نجد قيمة تختلف عنها إيجابا أو سلبا بمعني أن القيمة التي نصل إليها بتطبيق المعادلة قد تزيد أو تنقص عن القيمة الفعلية كما يمكن أن نحصل على نفس القيمة المناظرة ، ويفسر ذلك بأن النقطة للقيمة المقدرة قد تقع اعلي الخط المستقيم وقد تقع أسفله كما قد تنطبق على الخط المستقيم .

وبتطبيق المعادلة السابق الحصول عليها لتقدير الأرباح عندما يصل حجم المبيعات ١٦٠ ألف جنيه (وهو رقم فعلي) نجد أن :

ص = ٠.٥٠٢ × ١٦٠ ــ ٤٩.٧٦٦ = ٣٠.٥٥٤ ألف جنيه .

وهي قيمة أعلي من الرقم الفعلي المناظر للمبيعات (٢٨) ويفسر ذلك على انه كان يجب على إدارة المشروع تحقيق أرباحا تصل على ٣٠٥٥٤ جنيها ولكنها حققت أقل من المستهدف .

فإذا حاولنا تطبيق المعادلة لتقدير الأرباح المتوقعة عند رقم مبيعات ٢٠٠ ألف جم نجد أن :

ص = ٠.٥٠٢ × ٢٠٠ ــ ٤٩.٧٦٦ = ٥٠.٦٣٤ ألف جنيه

وهي قيمة اقل مما تحقق فعلا مما يعني أن الإدارة حققت رقما أكبر من المستهدف طبقا للمعادلة .

مثـال (٢) :

فيما يلي بيان بالأرباح التي حققتها إحدى الشركات خلال الفترة الموضحة بالجدول عام ٢٠١٨ م (القيمة بالألف جنيه):

شهور	يناير	فبراير	مارس	ابريل	مايو	يونيو	يوليو
الأرباح	٨	١٠	١١	١٥	١٧	٢٠	٢٥

وبفرض أن الأرباح تتبع معادلة اتجاه عام (معادلة انحدار – معادلة خطية)

المطلوب :

١- تحديد المعادلة .

٢- تقدير أرباح الشركة عن شهور أكتوبر ، مارس من نفس العام.

الحـــل

شهور	أرباح (ص)	س	س ص	$س^٢$
يناير	٨	٣-	٢٤-	٩
فبراير	١٠	٢-	٢٠-	٤
مارس	١١	١-	١١-	١
أبريل	١٥	٠	٠	٠
مايو	١٧	١	١٧	١
يونيه	٢٠	٢	٤٠	٤
يوليه	٢٥	٣	٧٥	٩
مجموع	١٠٦	صفر	٧٧	٢٨

ن = ٧

ص = م س + حـ

$$\text{م} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$\text{م} = \frac{٧ \times ٧٧ - \text{صفر} \times ١٠٦}{٧ \times ٢٨ - (\text{صفر})^{٢}} = ٢.٧٥$$

$$\text{حـ} = \text{ص} - \text{م س}$$

$$\text{حـ} = \frac{١٠٦}{٧} - ٢.٧٥ \times \frac{\text{صفر}}{٧} = ١٥.١٤٣$$

١- المعادلـــة :

$$\text{ص} = ٢.٧٥ \text{ س} + ١٥.١٤٣$$

٢- تقدير الأربـــاح :

في شهر أكتوبر من نفس العام يكون ترتيب س = ٦

ص = ٢.٧٥ × ٦ + ١٥.١٤٣ = ٣١.٦٤٣ ألف جنيه

في شهر مارس من نفس العام ترتيب س = -١

ص = ٢.٧٥ (-١) + ١٥.١٤٣ = ١٢.٣٩٣ ألف جنيه

ملاحظـات :

- يلاحظ عند ترتيب الشهور اتخذنا شهر أبريل على أنه شهر الأساس بقيمة تساوي صفر ، وبذلك تكون الشهور السابقة ترتيبا -١ ، -٢، -٣ أما الشهور التالية فيكون ترتيبها ١، ٢، ٣ . وقد ساعد على ذلك أن عدد شهور الفترة الزمنية عدد فردي = ٧ .

- أدي استخدام شهر الأساس يتوسط السلسلة الزمنية أن أصبح مجموع (س) = صفر ويترتب على ذلك :

$$م = \frac{مجـ س ص}{مجـ س^{2}}$$

كما ترتب على ذلك أيضا أن :

$$حـ = ص$$

- يمكن اختيار أي شهر من السلسلة المذكورة واعتباره فترة الأساس، ولا يؤثر ذلك على النتيجة النهائية.

حـل أخـر

شهور	أرباح (ص)	س	س ص	$س^{2}$
يناير	٨	٠	٠	٠
فبراير	١٠	١	١٠	١
مارس	١١	٢	٢٢	٤
أبريل	١٥	٣	٤٥	٩
مايو	١٧	٤	٦٨	١٦
يونيه	٢٠	٥	١٠٠	٢٥
يوليه	٢٥	٦	١٥٠	٣٦
مجموع	١٠٦	٢١	٣٩٥	٩١

ن = ٧

$$ص = م س + حـ$$

$$م = \frac{ن مجـ س ص - مجـ س \times مجـ ص}{ن مجـ س^{2} - (مجـ س)^{2}}$$

$$م = \frac{٧ \times ٣٩٥ - ٢١ \times ١٠٦}{٧ \times ٩١ - (٢١)^٢} = ٢.٧٥$$

$$حـ = \bar{ص} - م\bar{س}$$

$$حـ = \frac{١٠٦}{٧} - ٢.٧٥ \times \frac{٢١}{٧} = ٦.٨٩٣$$

$$ص = ٢.٧٥\ س + ٦.٨٩٣$$

تقدير الأرباح في شهر أكتوبر من نفس العام :

س = ٩

ص = ٢.٧٥ × ٩ + ٦.٨٩٣ = ٣١.٦٤٣ الف جنيه

تقدير الأرباح في شهر مارس من نفس العام :

س = ٢

ص = ٢.٧٥ × ٢ + ٦.٨٩٣ = ١٢.٣٩٣ ألف جنيه

- يلاحظ أننا حصلنا على نفس النتائج السابق الحصول عليها مع اختلاف فترة الأساس .
- يلاحظ أن قيمة م ثابتة لم تتغير وهي عبارة عن ميل الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة أو ظل الزاوية التي يصنعها الخط المستقيم مع المحور الأفقي .

- أدي اختلاف الترتيب نتيجة اختلاف فترة الأساس إلى اختلاف قيمة (حـ) الأمر الذي يترتب عليه الحفاظ على نفس النتيجة النهائية.
- إن اختيار فترة الأساس تتوسط السلسلة الزمنية كما في الحل الأول يؤدي إلى سهولة العمليات الرياضية .

مثال (٣) :

فيما يلي بيان بعدد الوحدات المباعة من سلعة معينة خلال الفترة الموضحة بالجدول من عام ٢٠١٨ (عدد الوحدات بالألف) :

شهور	يناير	فبراير	مارس	ابريل	مايو	يونيو	يوليو	اغسطس
عدد الوحدات	١٠	١٣	١٥	١٦	١٨	٢٢	٢٥	٣٠

وبفرض أن عدد الوحدات المباعة تتبع دالة خطية (معادلة خط مستقيم)

المطلوب :

١- تحديد الدالــة .
٢- تقدير عدد الوحدات المباعة خلال شهرى أبريل وأكتوبر من نفس العام

الحــــل

شهور	مبيعات (ص)	س	س ص	س^٢
يناير	١٠	٧-	٧٠-	٤٩
فبراير	١٣	٥-	٦٥-	٢٥
مارس	١٥	٣-	٤٥-	٩
أبريل	١٦	١-	١٦-	١
مايو	١٨	١	١٨	١
يونيه	٢٢	٣	٦٦	٩
يوليه	٢٥	٥	١٢٥	٢٥
أغسطس	٣٠	٧	٢١٠	٤٩
مجموع	١٤٩	صفر	٢٢٣	١٦٨

ن = ٨

ص = م س + حـ

$$م = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - مجـ\ س \times مجـ\ ص}{ن\ مجـ\ س^{٢} - (مجـ\ س)^{٢}}$$

$$م = \frac{٨ \times ٢٢٣ - صفر \times ١٤٩}{٨ \times ١٦٨ - (صفر)^{٢}} = ١.٣٢٧٤$$

حـ = صَ - م سَ

$$حـ = \frac{١٤٩}{٨} - ١.٣٢٧٤ \times صفر = ١٨.٦٢٥$$

١- المعادلـــة :

ص = ١.٣٢٧٤س + ١٨.٦٢٥

٢- تقدير المبيعات في شهر أبريل :

س = -١

ص =١.٣٢٧٤ × (-١) + ١٨.٦٢٥ = ١٧.٢٩٨ألف وحدة

٣- تقدير المبيعات في شهر أكتوبر :

س = ١١

ص = ١.٣٢٧٤ × ١١ + ١٨.٦٢٥ = ٣٣.٢٢٦٤ ألف وحدة

ملاحظـــات :

- عدد مفردات السلسلة عددا زوجيا (٨) ، تم اتخاذ نقطة القياس أي نقطة الأساس في منتصف السلسلة ولذلك أصبح كل شهر كأنه ممثلا بوحدتين قياسيتين، وعلى هذا الأساس كانت الفترات السابقة -١ ، -٣، -٥ ، -٧ أما الفترات التالية فأخذت الترتيب ١، ٣، ٥، ٧ .
- نتج عن ذلك أن مجـ س= صفر،أيضا $(\text{مجـ س})^2$ = صفر.
- يمكن حل المثال مرة أخرى باتخاذ أي فترة على أنها فترة الأساس ثم نقارن النتائج .

حـل آخـر

شهور	مبيعات (ص)	س	س ص	$س^2$
يناير	١٠	٠	٠	٠
فبراير	١٣	١	١٣	١
مارس	١٥	٢	٣٠	٤
أبريل	١٦	٣	٤٨	٩
مايو	١٨	٤	٧٢	١٦
يونيه	٢٢	٥	١١٠	٢٥
يوليه	٢٥	٦	١٥٠	٣٦
أغسطس	٣٠	٧	٢١٠	٤٩
مجموع	١٤٩	٢٨	٦٣٣	١٤٠

ن = ٨

$$ص = م\,س + حـ$$

$$م = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ }س^2 - (\text{مجـ س})^2}$$

$$م = \frac{٨ \times ٦٣٣ - ٢٨ \times ١٤٩}{٨ \times ١٤٠ - (٢٨)^٢} = ٢.٦٥٤٨$$

$$حـ = \overline{ص} - م\overline{س}$$

$$حـ = \frac{١٤٩}{٨} - ٢.٦٥٤٨ \times \frac{٢٨}{٨} = ٩.٣٣٣٢$$

١- المعادلــة :

$$ص = ٢.٦٥٤٨س + ٩.٣٣٣٢$$

٢- تقدير المبيعات في شهر أبريل :

س = ٣

ص= ٢.٦٥٤٨ × ٣ + ٩.٣٣٣٢ = ١٧.٢٩٧٦ ألف وحدة

٣- تقدير المبيعات في شهر أكتوبر :

س = ٩

ص = ٢.٦٥٤٨ × ٩ + ٩.٣٣٣٢ = ٣٣.٢٢٦٤ ألف وحدة

وهي نفس النتائج السابق الحصول عليها .

مثـال (٤) :

قامت شركة ملك بدراسة المبيعات (س) والأرباح التي حققتها (ص) خلال فترة زمنية معينة، وتم استخراج البيانات التالية من سجلات الشركة (القيمة بالألف جنيه) :

المبيعات (س)	١٠٠	١٢٠	١٢٥	١٤٠	١٥٠	١٦٠	٢٠٠
الأرباح (ص)	١٢	١٥	١٦	٢٠	٢٥	٣٠	٥٠

وبفرض أن العلاقة خطية بين المبيعات والأرباح .

المطلوب :

١- تحديد معادلة الاتجاه العام.

٢- تقدير الأرباح عندما يصل حجم المبيعات ١٤٠ ألف جنيه. علل سبب اختلاف النتيجة إن وجد.

وتقدير الأرباح عندما تصل المبيعات ٢٢٥ ألف جنيه.

٣- بفرض أن طموح الإدارة تحقيق ربح ٨٥ ألف ج فما هو حجم المبيعات اللازم تحقيقه للوصول إلى الربح .

الحـل

ص	س	س ص	$س^2$
١٢	١٠٠	١٢٠٠	١٠٠٠٠
١٥	١٢٠	١٨٠٠	١٤٤٠٠
١٦	١٢٥	٢٠٠٠	١٥٦٢٥
٢٠	١٤٠	٢٨٠٠	١٩٦٠٠
٢٥	١٥٠	٣٧٥٠	٢٢٥٠٠
٣٠	١٦٠	٤٨٠٠	٢٥٦٠٠
٥٠	٢٠٠	١٠٠٠٠	٤٠٠٠٠
١٦٨	٩٩٥	٢٦٣٥٠	١٤٧٧٢٥

معادلة الاتجـاه العـام :

ص = م س + حـ

$$م = \frac{\text{م مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$م = \frac{٧ \times ٢٦٣٥٠ - ٩٩٥ \times ١٦٨}{٧ \times ١٤٧٧٢٥ - (٩٩٥)^{٢}} = ٠.٣٩٢٥$$

$$حـ = \bar{ص} - م\bar{س}$$

$$حـ = \frac{\text{مجـ ص}}{ن} \times \frac{\text{مجـ س}}{ن}$$

$$حـ = \frac{١٦٨}{٧} - ٠.٣٩٢٥ \times \frac{٩٩٥}{٧} = -٣١,٧٩١$$

أولا : المعادلـــة :

$$ص = ٠.٣٩٢٥ \text{ س} - ٣١.٩٧١$$

ثانيا : تقدير الأرباح عند حجم مبيعات ١٤٠ ألف ج :

ص = ٠.٣٩٢٥ × ١٤٠ – ٣١.٧٩١ = ٢٣.١٥٩ ألف ج .

يرجع سبب اختلاف النتيجة إلى قصور في الإدارة حتى لم تحقق المستهدف منها وحققت ٢٠ ألف ج فقط .

تقدير الأرباح عند حجم مبيعات ٢٢٥ ألف ج :

ص = ٠.٣٩٢٥ × ٢٢٥ – ٣١.٧٩١ = ٥٦.٥٢٢ ألف ج

ثالثا : حجم المبيعات اللازم لتحقيق ربح ٨٥ ألف ج :

٨٥ = ٠.٣٩٢٥ س – ٣١.٧٩١

٠.٣٩٢٥ س = ١١٦.٧٩١

س = ١١٦.٧٩١ ÷ ٠.٣٩٢٥ = ٢٩٧.٥٦ الف جنيه

تطبيقات الفصل الثانى

١- فيما يلي بيان بأعداد الطلاب في أحد أقسام الكلية خلال الفترة الموضحة بالجدول :

سنوات	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣	٢٠١٤	٢٠١٥	٢٠١٦	٢٠١٧
عدد الطلاب (ص)	١٢٠	١٥٠	١٦٠	١٨٠	٢٠٥	٢١٥	٢٤٠

وبفرض أن أعداد الطلاب تتبع معادلة اتجاه عام ، المطلوب:

١- تحديد معادلة الاتجاه العام .

٢- تقدير أعداد الطلاب المتوقع قبولهم بالقسم عام ٢٠١٩

٣- تطبيق المعادلة لتقدير أعداد الطلاب عام ٢٠١٠.

٢- فيما يلي بيان بعدد الوحدات المباعة من سلعة معينة خلال الفترة الموضحة بالجدول عام ٢٠١٨ بالألف وحدة :

شهور	يناير	فبراير	مارس	ابريل	مايو	يونيو	يوليو
عدد الوحدات	١٠	١٢	١٥	٢٠	٢١	٢٥	٣٠

والمطلوب :

١- تحديد معادلة الاتجاه العام .

٢- تقدير عدد الوحدات المباعة خلال شهر مارس وشهر أكتوبر.

١- فيما يلي بيان بالأرباح الشهرية لإحدى الشركات خلال الفترة الموضحة عام ٢٠١٨ (القيمة بالألف جنيه)

شهور	يناير	فبراير	مارس	ابريل	مايو	يونيو
الأرباح	٨	١٠	١٥	١٨	٢٠	٢٥

والمطلوب :

١- تحديد معادلة الاتجاه العام

٢- تقدير الأرباح في شهر مايو وشهر ديسمبر من نفس العام .



الباب الرابع
التوزيعات الإحتمالية
Probability Distributions

الفصل الأول : التوزيعات الاحتمالية المنفصلة : توزيع بواسون.

Discrete Prob. Distributions: poission Dis.

الفصل الثانى: التوزيعات الاحتمالية المتصلة: التوزيع الطبيعى.

Continuous Prob. Distributions: Normal Distribution.

الأهداف السلوكية:

بعد دراسة مواضيع هذا الباب يجب أن يكون الدارس قادراً على:

١- التعرف على أكثر التوزيعات الاحتمالية المنفصلة شيوعاً (توزيع بواسون وكيفية حسابه.

٢- التعرف على التوزيعات الاحتمالية المتصلة: التوزيع الطبيعى والتوزيع الطبيعى المعيارى.

٣- كيفية استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع بواسون.

العناصر:

[١] الفصل الأول : التوزيعات الاحتمالية المنفصلة: – توزيع بواسون.

١- توزيع بواسون.

[٢] الفصل الثانى: التوزيعات الاحتمالية المتصلة: التوزيع الطبيعى.

١- التوزيع الطبيعى.

٢- التوزيع المعيارى.

٣- استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع بواسون.

[٣] الخلاصة.

[٤] تمارين .



الفصل الأول
التوزيعات الاحتمالية المنفصلة
Discrete Probability Distributions
Poisson dis. - توزيع بواسون

تتعدد التوزيعات الاحتمالية المنفصلة بتعدد الدوال الاحتمالية التى تأخذها المتغيرات المنفصلة إلا أن أكثرها شيوعاً توزيع ذو الحدين وتوزيع بواسون.

توزيع بواسون : Poission Distribution

يستخدم هذا التوزيع فى حالة المتغيرات المنفصلة التى تتصف بالندرة، أىالتى يكون احتمال تحققها صغيراً جداً ويعتبر حالة خاصة من توزيع ذو الحدين، وخاصة إذا كان عدد المحاولات (ن) كبيراً جداً، بالإضافة إلى أن احتمال الحدوث (ل) ضئيلاً جداً (أقل من ١٠%).

ومن ثم فإن الأسس التى يقوم عليها توزيع بواسونهى:

١- أن عدد المحاولات الكلية (حجم التجربة أو العينة) كبيراً جداً (ن ≥ ٣٠).

٢- أن المحاولات مستقلة عن بعضها.

٣- أن احتمال النجاح (ل) ثابت فأى محاولة وقيمته صغيرة جداً (ل < ٠.١).

والدالة الاحتمالية لهذا التوزيع تأخذ الصورة التالية:

$$ح_{(س)} = \frac{هـ^{-\mu} \times \mu^{س}}{\underline{|س}}$$

حيث: هـ أساس اللوغاريتم الطبيعى هـ = ٢.٧١٨٣

μ الوسط الحسابى أو القيمة المتوقعة لعدد مرات النجاح.

س عدد مرات النجاح س = ٠، ١، ٢، .....، ∞

$\underline{|س}$ مضروب س = س(س – ١) (س -٢) ... ٣ × ٢ × ١

علما بأن: $\lfloor 0$ = ١، (أى مقدار)^{صفر} = ١

الخصائص الإحصائية لتوزيع بواسون:

القيمة المتوقعة μ = ن × ل

التباين δ^2 = ن × ل

أى أن القيمة المتوقعة = التباين لتوزيع بواسون

ومن الناحية العملية فإن توزيع بواسون يستخدم فى مجالات كثيرة وخاصة فى المجال الصناعى الذى يتسم بالإنتاج الكبير لأن احتمالات الأخطاء تكون ضئيلة جداً مثل صناعة السيارات، وقطع الغيار، وصناعة المسامير كما يستخدم بشكل كبير فى مجال الطباعة، واحتمالات الوفاة للمؤمنين لدى شركات التأمين.

مثال (٤):

إذا كانت نسبة الإنتاج المعيب فى أحد المصانع ١% سحبت عينة من إنتاج هذا المصنع حجمها ٥٠ وحدة، احسب ما يلى:

١- احتمال ألا نجد بالعينة أى وحدة معيبة.

٢- احتمال أن نجد بالعينة وحدتين على الأكثر معيبة.

٣- احتمال أن نجد بالعينة ٤ وحدات على الأقل معيبة.

٤- القيمة المتوقعة والتباين لعدد الوحدات المعيبة فى العينة.

الحـل

ن = ٥٠ ل = ٠.٠١ μ = ن × ل = ٥٠ × ٠.٠١ = ٠.٥

١- احتمال ألا نجد بالعينة أى وحدة معيبة:

$$ح_{(0)} = \frac{(2.7183)^{-0.5} \times (0.5)^{0}}{\lfloor 0} = 0.6065$$

٢- احتمال أن نجد بالعينة وحدتين على الأكثر معيبة = $ح_{(٢)} + ح_{(١)} + ح_{(٠)}$

$$ح_{(١)} = \frac{(٢.٧١٨٣)^{-٠.٥} \times (٠.٥)^{١}}{\underline{|١}} = ٠.٣٠٣٣$$

$$ح_{(٢)} = \frac{(٢.٧١٨٣)^{-٠.٥} \times (٠.٥)^{٢}}{\underline{|٢}} = ٠.٠٧٥٨$$

∴ الاحتمال المطلوب = ٠.٦٠٦٥ + ٠.٣٠٣٣ + ٠.٠٧٥٨ = ٠.٩٨٥٦

٣- احتمال أن نجد ٤ وحدات على الأقل معيبة = ٤ معيبة أو ٥ معيبة أو .. أو ٥٠ معيبة.

= ١ – الاحتمال العكسى

= ١ – [٣ معيبة أو ٢ معيبة أو ١ معيبة أو صفر معيبة]

= ١ – [$ح_{(٣)} + ح_{(٢)} + ح_{(١)} + ح_{(٠)}$]

$$ح_{(٣)} = \frac{(٢.٧١٨٣)^{-٠.٥} \times (٠.٥)^{٣}}{\underline{|٣}} = ٠.٠١٢٦$$

∴ الاحتمال المطلوب = ١ – [٠.٠١٢٦ + ٠.٩٨٥٦]

= ١ – ٠.٩٩٨٢ = ٠.٠٠١٨

٤- القيمة المتوقعة والتباين لعدد الوحدات المعيبة فى العينة:

بالنسبة لتوزيع بواسون فإن $\mu = \delta^{٢}$ = ن × ل = ٥٠ × ٠.٠١

= ٠.٥ وحدة

أى أننا لو سحبنا عدداً كبيراً جداً من العينات من إنتاج هذا المصنع وحجم كل عينة ٥٠ وحدة فإننا سنجد فى كل عينة فى المتوسط ٠.٥ وحدة معيبة.

هام جداً:

على الرغم من الصعوبة التى قد تبدو فى حساب الاحتمالات من خلال دالة توزيع بواسون إلا أن هناك علاقة تربط الاحتمالات بعضها ببعض وهذه العلاقة تعتمد على حساب $ح_{(٠)}$ وبالتالى يمكن حساب الاحتمالات التالية كما يلى:

$$ح_{(٠)} = ٠.٦٠٦٥$$

$$ح_{(١)} = ح_{(٠)} \times \frac{\mu}{١} = ٠.٦٠٦٥ \times \frac{٠.٥}{١} = ٠.٣٠٣٣$$

$$ح_{(٢)} = ح_{(١)} \times \frac{\mu}{٢} = ٠.٣٠٣٣ \times \frac{٠.٥}{٢} = ٠.٠٧٥٨$$

$$ح_{(٣)} = ح_{(٢)} \times \frac{\mu}{٣} = ٠.٠٧٥٨ \times \frac{٠.٥}{٣} = ٠.٠١٢٦$$

⋮

وهكذا

⋮

$$ح_{(١٠)} = ح_{(٩)} \times \frac{\mu}{١٠}$$

$$ح_{(س)} = ح_{(س-١)} \times \frac{\mu}{س}$$

٢- هناك جداول معدة لحساب الاحتمالات المختلفة إلا أن وجود العلاقة السابقة يقلل من أهمية استخدام تلك الجداول.

٣- ليس من الضرورى أن يأتى الاحتمال معلوماً حتى نحسب المتوسط μ فقد تأتى البيانات فى صورة نقوم من خلالها بحساب المتوسط الفعلىأى:

متوسط العينة $\bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$ أو $\bar{س} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}$

حسب نوع البيانات غير مبوبة أو مبوبة كما سبق وأشرنا.

وهنا نعتبر أن $\bar{س}$ تمثل متوسط المجتمع أى $\bar{س} = \mu$ ثم نتابع الحل من خلال دالة التوزيع، كما يتضح من المثال التالى:

مثال (٥):

قام أحد المؤلفين بحصر عدد الصفحات التى بها أخطاء وفقاً لعدد الأخطاء فى كل صفحة فكان توزيع صفحات الكتاب كما يلى:

عدد الأخطاء	**صفر**	**١**	**٢**	**٣**	**٤**	**٥**	**٦**	**٧**	**٨**	**٩**	**١٠**
عدد الصفحات	**٢٥٥**	**١٥٠**	**٥٠**	**١٥**	**١٠**	**٨**	**٥**	**٣**	**٢**	**١**	**١**

فإذا أراد هذا المؤلف طباعة كتاب آخر فى نفس المطبعة على ألا يزيد عدد الأخطاء فى الصفحة الواحدة عن خطأين، فما هو احتمال أن تتحقق هذه الرغبة، على فرض أن الأخطاء المطبعية تتبع توزيع بواسون.

الحــل

نحسب μ من خلال بيانات العينة على أساس أن $\mu = \bar{س} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}$

عدد الأخطاء (س)	**صفر**	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	**المجموع**
عدد الصفحات (ك)	٢٥٥	١٥٠	٥٠	١٥	١٠	٨	٥	٣	٢	١	١	٥٠٠
س ك	**صفر**	١٥٠	١٠٠	٤٥	٤٠	٤٠	٣٠	٢١	١٦	٩	١٠	٤٦١

$$\mu = \bar{س} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٤٦١}{٥٠٠} = ٠.٩٢٢$$

احتمال ألا يزيد عدد الأخطاء عن خطأين = $ح_{(٠)} + ح_{(١)} + ح_{(٢)}$

$$ح_{(٠)} = \frac{(٢.١٧٨٣)^{-٠.٩٢٢} \times (٠.٩٢٢)^{٠}}{\lfloor ٠} = ٠.٣٩٧٧$$

$$ح_{(١)} = ح_{(٠)} \times \frac{٠.٩٢٢}{١} = ٠.٣٦٦٧$$

$$ح_{(٢)} = ح_{(١)} \times \frac{٠.٩٢٢}{٢} = ٠.١٦٩٠$$

الاحتمال المطلوب ٠.٩٣٣٤

الفصل الثانى

التوزيعات الاحتمالية المتصلة

Continuous Probability Distributions

التوزيع الطبيعى

Normal Distribution

تتعدد التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغيرات المتصلة أو المستمرة وسوف نكتفى بتناول التوزيع الطبيعى وسنرجئ تناول باقى التوزيعات الاحتمالية المتصلة حيث يتم تناولها عند حديثنا عن استخدامات الدوال الاحتمالية لتلك التوزيعات.

التوزيع الطبيعى Normal Distribution :

وهو من أهم التوزيعات الاحتمالية وأكثرها استخداماً فى علم الإحصاء، ومنحنى هذا التوزيع منحنى متماثل أو متعادل أى أننا لو أسقطنا من قمة المنحنى عمود على المحور الأفقى فإنه يقسم المنحنى إلى نصفين متطابقين تماماً ومساحة كل نصف منهما (مجموع الاحتمالات) = ٠.٥.

وترجع أهمية التوزيع الطبيعى إلى أسباب عديدة من أهمها:

١- أن معظم الظواهر الطبيعية تتبع فى توزيعها التوزيع الطبيعى أو تكون قريبة جداً منه، حيث تتركز قياساتها عند قيمتها الوسطى ثم تبتعد عن هذه القيمة فى الاتجاهين (التزايد والتناقص) بشكل يكاد يكون متعادلاً.

٢- أن معظم القياسات التى تتم من خلال عينة، كالوسط الحسابى ($\overline{س}$) والانحراف المعيارى (ع) والنسبة ($\hat{ل}$) لها توزيع احتمالى يقترب من التوزيع الطبيعى مهما كان التوزيع الاحتمالى للمجتمع الأصلى المسحوب منه العينة، ويزداد اقترابها من التوزيع الطبيعى بزيادة حجم العينة، لذلك يستخدم التوزيع الطبيعىفى المعالجة الإحصائية لهذه المقاييس، فلو أننا سحبنا عدداً من العينات قدره (ن) وحسبنا الوسط الحسابى لكل عينة أى $\overline{س}_{١}$، $\overline{س}_{٢}$، $\overline{س}_{٣}$، ...، $\overline{س}_{ن}$ فإن توزيع هذه المتوسطات يأخذ شكل منحنى قريباً جداً من شكل المنحنى الطبيعى حتى ولو كان توزيع المجتمع الأصلى الذى سحبت منه العينة ليس توزيعاً طبيعياً.

٣- بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغيرات المنفصلة مثل توزيع ذو الحدين أو توزيع بواسون يمكن تحويلها إلى التوزيع الطبيعى ولكن وفقاً لشروط معينة تتعلق بحجم العينة وقيمة الاحتمال وطبيعة التوزيع الاحتمالىفى المجتمع.

٤- هناك جدول لحساب المساحات (الاحتمالات) أسفل المنحنى الطبيعى وهو بذلك يعتبر من أهم المزايا التى يتمتع بها التوزيع الطبيعى نظراً لصعوبة أو استحالة حساب الاحتمالات المختلفة من الدالة الاحتمالية للتوزيع الطبيعى إلى جانب سهولة استخدام الجدول.

دالة كثافة الاحتمال Probability Denisty Function:

الدالة الاحتمالية للتوزيع الطبيعى تأخذ الصورة التالية:

$$ح_{(س)} = \frac{١}{\delta\sqrt{٢ط}} \times هـ^{\frac{-١}{٢}\left(\frac{س - \mu}{\delta}\right)^{٢}}$$

حيث:

μ = الوسط الحسابى للتوزيع (التوقع)   هـ = ٢.٧١٨٣

δ = الانحراف المعيارى للتوزيع   ط = $\frac{٢٢}{٧}$

س = قيمة المتغير العشوائى، حيث - $\infty \leq$ س $\leq$ + ∞

خصائص التوزيع الطبيعى.Characteristics of Normal Dis:

هناك خصائص عديدة لمنحنى التوزيع الطبيعى وهى تعتبر الأساس الذى يقوم عليه الاستنتاج الإحصائىStatistical Inference ومن أهم تلك الخصائص:

١- تصل قمة المنحنى الممثل للتوزيع إلى نهايتها العظمى عندما تصبح قيمة المتغير العشوائى مساوية للوسط الحسابى (س = μ).

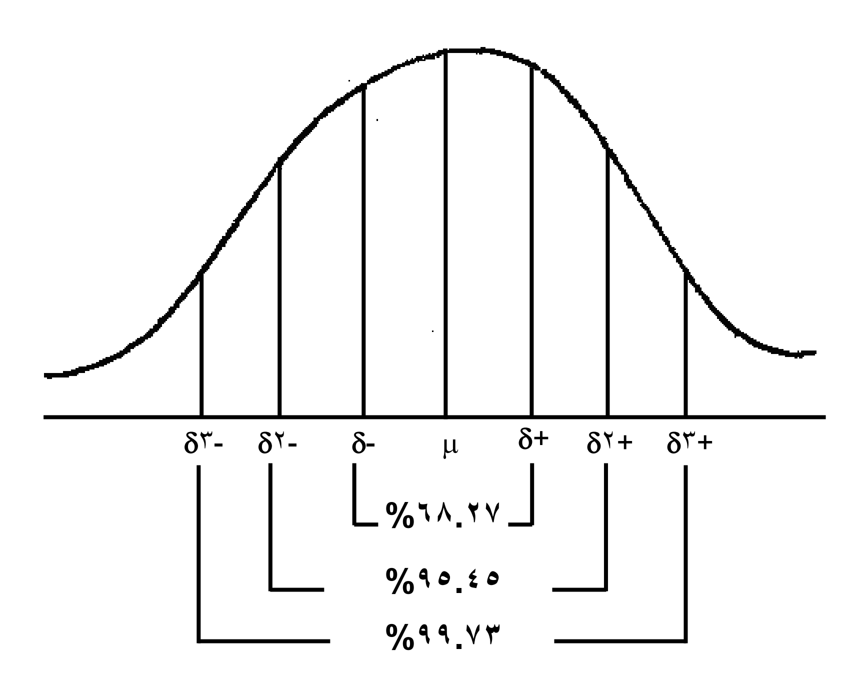
٢- تتساوى مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابى والوسيط والمنوال) فى التوزيع الطبيعى.

٣- يمتد طرفا المنحنى إلى الاتجاهين الموجب والسالب إلى مالا نهاية (±∞) دون أن يلتقيا مع المحور الأفقى.
٤- إجمالى المساحة أسفل المنحنى الطبيعى (مجموع الاحتمالات) = ١.
٥- هناك بعض المساحات أسفل المنحنى الطبيعى لها أهمية خاصة فى التحليل الإحصائى وهى:

١/٥ المساحة التى تقع بين الوسط الحسابى± انحراف معيارى تعادل ٦٨.٢٧% من إجمالى المساحة أسفل المنحنى.

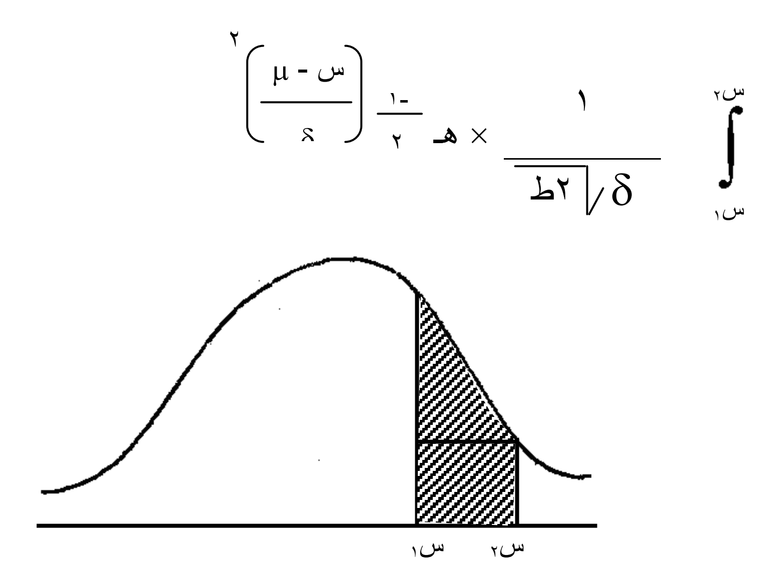
٢/٥ المساحة التى تقع بين الوسط الحسابى±٢ انحراف معيارى تعادل ٩٥.٤٥% من إجمالى المساحة أسفل المنحنى.

٣/٥ المساحة التى تقع بين الوسط الحسابى±٣ انحراف معيارى تعادل ٩٩.٧٣% من إجمالى المساحة أسفل المنحنى.



التوزيع الطبيعى المعيارى Standard Normal Dis. :

إذا أردنا حساب المساحة أسفل المنحنى الطبيعىالتى تقع بين القيمة س١، س٢ مثلاً فإنه من الضرورى إجراء التكامل على دالة التوزيع الطبيعى السابق الإشارة إليها أى :



$$\int_{س_1}^{س_2} \frac{1}{\delta \sqrt{٢ط}} \times هـ^{\frac{-١}{٢}\left(\frac{س - \mu}{\delta}\right)^{٢}}$$

وعلى ذلك فإننا لكى نحسب قيمة التكامل لابد من معرفة $س_1$، $س_2$، μ، δ، ولو تصورنا أننا تسهيلاً لذلك سنقوم بإعداد جدول لحساب الاحتمالات المختلفة لكان ذلك أمراً مستحيلاً لأن قيم أى متغير متصل لا نهائية، هذا إلى جانب اختلاف قيم (μ، δ) من ظاهرة لأخرى وقد تكون معالم المجتمع (μ، δ) مجهولة لبعض الظواهر مما يستحيل معه حساب الاحتمالات الخاصة بها، إلا أنه جرت العادة على اعتبار أن مؤشرات العينة ($\overline{س}$، ع) تعتبر تقديرات غير متحيزة لمعالم المجتمع المجهولة أى اعتبار أن μ = $\overline{س}$، وأن δ = ع مع ملاحظة أنه عند حساب الانحراف المعيارى للعينة (ع) نقوم بالقسمة على (ن-١) بدلاً من (ن) كما يلى:

$$ع = \sqrt{\frac{١}{ن - ١}\left(مجـ س^{٢} - \frac{(مجـ س)^{٢}}{ن}\right)}$$

وقد أمكن التغلب على هذه المشاكل وذلك بتحويل قيم المتغير العشوائى (س) أى $س_1$، $س_2$، $س_3$، ...، $س_ن$ إلى قيم معيارية (ى) Standard value كما سبق وأشرنا عند حساب القيمة المعيارية فى مقاييس التشتت:

$$ى = \frac{س - \mu}{\delta}$$

والقيمة المعيارية (ى) عبارة عن متغير عشوائى يتبع التوزيع الطبيعى وسطه الحسابىμ = صفر وانحرافه المعيارىδ = ١ وعلى ذلك تتحول دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعى بالقيم العادية (س) إلى دالة كثافة الاحتمال بالقيم المعيارية (ى):

$$ح(ى) = \frac{١}{\sqrt{٢ط}} \times هـ^{\frac{-١}{٢} ى^{٢}}$$

وعلى ذلك فإنه لحساب الاحتمالات الخاصة بالمتغير العشوائى والذى يتبع توزيعاً طبيعياً معالمه (μ، δ) نقوم بتحويل قيم (س) إلى قيم معيارية (ى) ثم نقوم بالكشف فى الجدول رقم (١) بالملاحق عن المساحة الإجمالية المناظرة.

وهذا الجدول يحتوى على قيم (ى) المعيارية من ى = صفر، ويقابلها احتمال ح(ى) = ٠.٥ إلى ى = ٤ ويقابلها احتمال ح(ى) = ٠.٩٩٩٩٧، فإذا زادت قيمة (ى) عن ٤ فإننا نأخذ نفس قيمة الاحتمال الأخير المقابل للقيمة ٤ أى (٠.٩٩٩٩٧).

ومعنى ذلك أنه لكى نحصل على قيمة الاحتمال بصورة مباشرة من الجدول فإنه لابد أن يكون فى صورة:

ح (ى $\leq$ رقم موجب)

أى لابد من توافر شرطين :

١- أن يكون المطلوب حساب احتمال أن يأخذ المتغير قيمة معينة أو أقل منها.
٢- أن تكون القيمة المعيارية (ى) المقابلة لقيمة (س) المطلوبة موجبة.

فمثلاً ح (ى $\leq$ ٢) نحصل عليها مباشرة من الجدول لتوافر الشرطين،

ح (ى $\leq$ ٢) = ٠.٩٧٧٢٥

لكن ما هو التصرف فى حالة عدم توافر شرط منهما أى يكون المطلوب ح (ى $\leq$ -) أو ح (ى $\leq$ +).

لاحظ أن التعامل مع هاتين الحالتين يكون واحداً لأن المساحة (الاحتمال) المطلوبة فى الحالتين واحدة كما يتضح من الشكلين المقابلين.

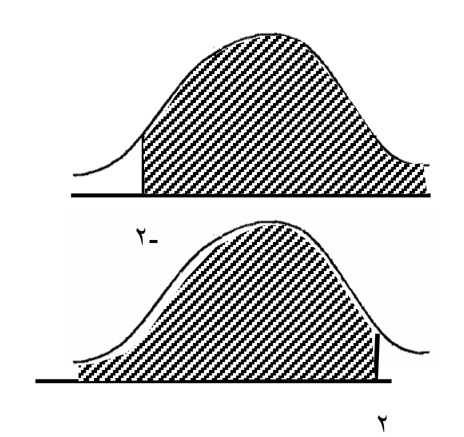
-٢

٢

أى أن ح (ى ≥ -) = ح (ى ≤ +) = ١ – ح (ى ≥ +)

ح (ى ≥ -٢) = ١ – ح (ى ≥ ٢) = ١ – ٠.٩٧٧٢٥ = ٠.٠٢٢٧٥

ح (ى ≤ ٢) = ١ – ح (ى ≥ ٢) = ١ – ٠.٩٧٧٢٥ = ٠.٠٢٢٧٥



ثم نأتى إلى تساؤل آخر، ما هو التصرف فى حالة عدم توافر الشرطين الخاصين بالكشف مباشرة فى الجدول أى عندما يكون المطلوب = ح(ى ≤).

لاحظ أن الشكلين المقابلين متطابقين بمعنى أن:

ح (ى ≤ -) = ح (ى ≥ +)

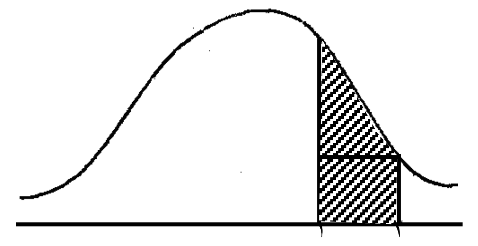
ح (ى ≤ -٢) = ح (ى ≥ ٢) = ٠.٩٧٧٢٥ مباشرة من الجدول

لاحظ أن ح (ى ≥ صفر) = ح (ى ≤ صفر) = ٠.٥

وذلك دون الكشف فى الجداول (خصائص التوزيع الطبيعىالمعيارى)

وقبل أن نتناول هذا الموضوع بالأمثلة نود أن نوضح بعض الأمور التى قد تواجهنا عند حساب بعض الاحتمالات:

حساب المساحة المحصورة بين قيمتين موجبتين:



ح = (١ ≥ ى ≥ ٢)

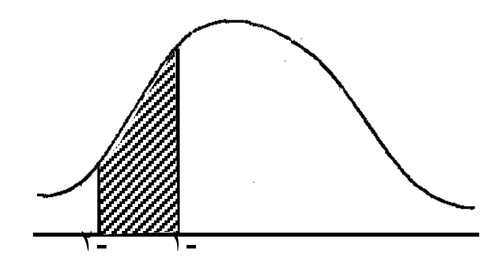
= ح (ى ≥ ٢) – ح (ى ≥ ١)

= ٠.٩٧٧٢٥ – ٠.٨٤١٣٤

= ٠.١٣٥٩١

حساب المساحة المحصورة بين قيمتين سالبتين:

ح (-٢ ≥ ى ≥ -١) = ح (١ ≥ ى ≥ ٢)



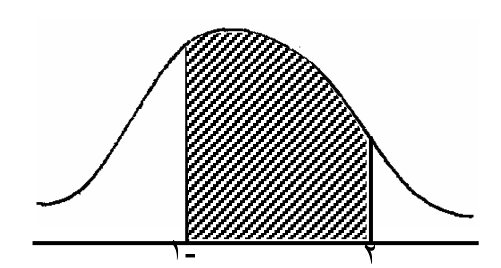
= ح (ى ≥ ٢) – ح(ى ≥ ١)

= ٠.١٣٥٩١

نفس المساحة المطلوبة سابقاً.

حساب المساحة المحصورة بين قيمة موجبة وأخرى سالبة:

ح (-١ ≥ ى ≥ ٢) = ح (ى ≥ ٢) – (ى ≥ -١)



=٠.٩٧٧٢٥ – [١ – ح(ى≥١)]

= ٠.٩٧٧٢٥ – [١-٠.٨٤١٣٤]

= ٠.٩٧٧٢٥ – ٠.١٥٨٦٦

= ٠.٨١٨٥٩

وسوف تتضح طريقة استخدام الجداول فى حساب الاحتمالات المختلفة من خلال الأمثلة الآتية:

مثال (١) :

إذا كان متوسط عمر الطالب فى الكلية ٢٠ سنة بانحراف معيارى ٥ سنوات وعلى فرض أن العمر يتبع التوزيع الطبيعى، احسب الاحتمالات التالية:

١- احتمال أن يتراوح عمر أحد الطلاب بين ٢٢، ٢٥ سنة:

ح (٢٢ ≤ س ≤ ٢٥) تحول إلى قيمة معيارية (ى) وفقاً للعلاقة:

$$ى = \frac{س - \mu}{\delta} \qquad \text{حيث } \mu = ٢٠ ، \delta = ٥$$

$$ح \left(\frac{٢٢ - ٢٠}{٥} \leq ى \leq \frac{٢٥ - ٢٠}{٥} \right) = \textbf{ح (٠.٤ ≤ ى ≤ ١)}$$

ح (٠.٤ ≤ ى ≤ ١) = ح (ى ≤ ١) – ح (ى ≤ ٠.٤)

= ٠.٨٤١٣٤ – ٠.٦٥٥٤٢

= ٠.١٨٥٩٢

٢- احتمال أن يكون عمر أحد الطلاب أكبر من ٢٥ سنة:

$$ح (س > ٢٥) = ح \left(ى > \frac{٢٥ - ٢٠}{٥} \right) = ح (ى > ١)$$

= ١ – ح (ى ≤ ١)

= ١ – ٠.٨٤١٣٤

= ٠.١٥٨٦٦

٣- احتمال أن يكون عمر الطالب أكبر من ١٨ سنة:

$$ح (س > ١٨) = ح \left(ى > \frac{١٨ - ٢٠}{٥} \right) = ح (ى > -٠.٤)$$

ح (ى > -٠.٤) = ح (س ≤ ٠.٤) = ٠.٦٥٥٤٢

٤- احتمال أن يكون عمر أحد الطلاب أقل من ١٦ سنة:

ح (س < ١٦) = ح (ى < (١٦ – ٢٠) / ٥) = ح (ى < -٠.٨)

= ١ – ح (ى < ٠.٨)

= ١- ٠.٧٨٨١٤ = ٠.٢١١٨٦

٥- احتمال أن يكون عمر أحد الطلاب أقل من ٢٦ سنة:

ح (س < ٢٦) = ح (ى < (٢٦ – ٢٠) / ٥) = ح (ى < ١.٢)

= ٠.٨٨٤٩٣

٦- احتمال أن يبلغ عمر أحد الطلاب ٢٤ سنة:

سبق أن أشرنا أن القيم التى يمكن أن نحصل على احتمالاتها مباشرة من الجدول تكون فى صورة ح (ى ≤ +)، ثم تعرفنا على كيفية حساب الاحتمالات فى حالة اختلاف شرط (الإشارة أو الاتجاه) أو فى حالة اختلاف الشرطين (الإشارة والاتجاه) وهذا يعنى أن ح (ى = رقم معين) = صفر.

إلا أننا يمكن ان نعتبر أن القيمة المطلوبة للمتغير كأنها مركز لفئة حديها القيمة المطلوبة ±٠.٥ أى أننا نضع المطلوب السابق فى الصورة التالية:

ح (س = ٢٤) = ح (٢٣.٥ ≤ س ≤ ٢٤.٥)

= ح ((٢٣.٥ – ٢٠) / ٥ ≤ ى ≤ (٢٤.٥ – ٢٠) / ٥)

= ح (٠.٧ ≤ ى ≤ ٠.٩)

= ح (ى ≤ ٠.٩) – ح (ى ≤ ٠.٧)

= ٠.٨١٥٩٤ – ٠.٧٥٨٠٤ = ٠.٠٥٧٩٠

حساب القيمة إذا علم الاحتمال :

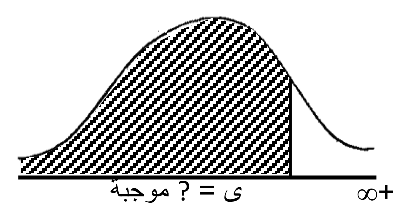
سبق أن أشرنا إلى أن أول قيمة معيارية هى ى = ٠ يقابلها احتمال ح(ى) = ٠.٥ ومعنى ذلك أن أول احتمال معلوم بالجدول = ٠.٥ وبالتالى لا يمكن الكشف عن قيمة (ى) إذا علم احتمالها إلا إذا كان الاحتمال ح(ى) ≤ ٠.٥، ولكى نصل إلى أسلوب مبسط لحساب القيمة إذا علم الاحتمال سنتناول الأمر كحالتين:

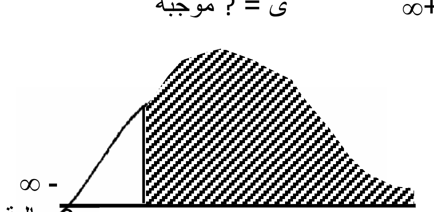
الحالة الأولى: إذا كان الاحتمال > ٠.٥

ولنأخذ مثلاً أن الاحتمال المعلوم ٠.٧٥

ونكون أمام حالتين إما:

ح (ى ?≥) = ٠.٧٥





هنا يتم الكشف مباشرة فى الجدول أمام القيمة ٠.٧٥ من عمود ح(ى) لنحدد من العمود المقابل لها قيمة ى = ٠.٦٧

أو ح (ى ?≤) = ٠.٧٥

لاحظ أن قيمة ى فى هذه الحالة تساوى قيمتها فى الحالة السابقة مع اختلاف الإشارة فهى موجبة فى الحالة الأولى وسالبة فى هذه الحالة.

∴ ى = -٠.٦٧

الحالة الثانية: إذا كان الاحتمال < ٠.٥

فى هذه الحالة وكما سبق وأشرنا لن نتمكن من استخدام الجدول وبالتالى لابد أن نوجد الاحتمال المكمل حيث:

ح (ى ?≥) = ٠.٣٥ = ح (ى ?≤) = ٠.٦٥

ح (ى ?≤) = ٠.٤٥ = ح (ى ?≥) = ٠.٥٥

ثم نكشف بالجدول عن الاحتمال المكمل مع تطبيق نفس ما توصلنا إليه فى الحالة الأولى.

أى أن ح (ى ?≤) = ٠.٦٥   ى = -٠.٣٩ سالبة لأنها ≤

ح (ى ?≥) = ٠.٥٥   ى = ٠.١٣ موجبة لأنها ≥

مثال (٢): قامت شركة النصر لصناعة اللمبات الكهربائية باختبار ١٠٠٠٠ لمبة من إنتاجها فتبين أن متوسط عمر اللمبة (مدة الإضاءة) ١٢٠٠ ساعة بانحراف معيارى ٣٠٠ ساعة، وعلى فرض أن عمر اللمبة الكهربائية متغير عشوائى يتبع توزيعاً طبيعياً، احسب ما يلى:

١- احتمال أن توجد لمبة عمرها أكبر من ١٥٠٠ ساعة:

ح (س > ١٥٠٠) = ح (ى > (١٥٠٠ – ١٢٠٠) / ٣٠٠)

= ح (ى > ١)   = ١ – ح (ى ≤ ١)

= ١ – ٠.٨٤١٣٤

= ٠.١٥٨٦٦

٢- احتمال أن توجد لمبة عمرها أقل من ٩٠٠ ساعة:

ح (س < ٩٠٠) = ح (ى < (٩٠٠ - ١٢٠٠) / ٣٠٠)

= ح (ى < -١) = ١ – ح (ى < ١)

= ١ – ٠.٨٤١٣٤

= ٠.١٥٨٦٦

٣- احتمال أن يتراوح عمر إحدى اللمبات بين ١٢٠٠، ١٦٠٠ ساعة:

ح (١٢٠٠ ≤ س ≤ ١٦٠٠)

= ح ((١٢٠٠ - ١٢٠٠) / ٣٠٠ ≤ ى ≤ (١٦٠٠ – ١٢٠٠) / ٣٠٠)

= ح (صفر ≤ ى ≤ ١.٣٣)

= ح (ى ≤ ١.٣٣) – ح (ى ≤ صفر)

= ٠.٩٠٨٢٤ – ٠.٥

= ٠.٤٠٨٢٤

٤- عدد اللمبات التى يتراوح عمرها بين ١١٠٠ ساعة، ١٥٠٠ ساعة:

نحسب الاحتمال أولاً:

ح (١١٠٠ ≤ س ≤ ١٥٠٠)

$$= ح \left(\frac{١١٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠} \leq ى \leq \frac{١٥٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠} \right)$$

= ح (-٠.٣٣ ≤ ى ≤ ١)

= ح (ى ≤ ١) – ح (ى ≤ -٠.٣٣)

= ٠.٨٤١٣٤ – [١ – ح (ى ≤ ٠.٣٣)]

= ٠.٨٤١٣٤ – [١ – ٠.٦٢٩٣٠]

= ٠.٨٤١٣٤ – ٠.٣٧٠٧٠

= ٠.٤٧٠٦٤

∴ عدد اللمبات التى يتراوح عمرها بين ١١٠٠، ١٥٠٠ ساعة

= ١٠٠٠٠ × ٠.٤٧٠٦٤ = ٤٧٠٦ لمبة

٥- العمر الذى يقل عنه عمر ٧٠% من عدد اللمبات:

ح (ى <?) = ٠.٧٠ من الجدول مباشرة ى = ٠.٥٣

وحيث أن: $ى = \frac{س - \mu}{\delta}$

$$٠.٥٣ = \frac{س - ١٢٠٠}{٣٠٠}$$

س – ١٢٠٠ = ١٥٩ ∴ س = ١٣٥٩ ساعة

ومعنى ذلك أن ٧٠% من عدد اللمبات (٧٠٠٠ لمبة) يبلغ عمر كل منها أقل من ١٣٥٩ ساعة.

٦- العمر الذى يقل عنه عمر ٢٥% من عدد اللمبات:

ح (ى <?) = ٠.٢٥ = ح (ى >?) = ٠.٧٥ لأنه أقل من ٠.٥، ثم نكشف بالجدول أمام ح(ى) = ٠.٧٥ فنحصل على قيمة ى نضع لها إشارة سالبة لأن الاتجاه ≤

ى = -٠.٦٨

$$-٠.٦٨ = \frac{س - ١٢٠٠}{٣٠٠}$$

س – ١٢٠٠ = -٢٠٤ ∴ س = ٩٩٦ ساعة

أى أن ٢٥% من عدد اللمبات (٢٥٠٠ لمبة) يبلغ عمر كل منها أقل من ٩٩٦ ساعة.

٧- العمر الذى يزيد عنه عمر ٨٠% من عدد اللمبات

ح (ى >?) = ٠.٨٠

من الجدول مباشرة (أكبر من ٠.٥) مع وضع إشارة سالبة لأنها (>).

ى = -٠.٨٤

س – ١٢٠٠ = -٢٥٢ ∴ س = ٩٤٨ ساعة

أى أن ٨٠% من عدد اللمبات (٨٠٠٠ لمبة) يزيد عمر كل منها على ٩٤٨ ساعة.

٨- العمر الذى يزيد عنه عمر ٤٥% من عدد اللمبات:

ح (ى >?) = ٠.٤٥ نوجد الاحتمال المكمل لأنه أقل من ٠.٥

ح (ى >?) = ٠.٤٥ = ح (ى <?) = ٠.٥٥ من الجدول مباشرة.

ى = ٠.١٣

$$٠.١٣ = \frac{س - ١٢٠٠}{٣٠٠}$$

س – ١٢٠٠ = ٣٩ ∴ س = ١٢٣٩ ساعة

ومعنى ذلك أن ٤٥% من عدد اللمبات (٤٥٠٠ لمبة) يزيد عمر كل منها على ١٢٣٩ ساعة.

استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع بواسون:

Normal Dis. as an Approximation to the poisson Dis.

كما سبق وأشرنا فى استخدام دالة التوزيع الطبيعى كتقريب لدالة توزيع ذو الحدين نظراً لصعوبة أو استحالة استخدام دالة توزيع ذو الحدين عندما تكون (ن) كبيرة جداً، وبالمثل فإنه من الصعوبة بمكان استخدام دالة توزيع بواسونفى حساب الاحتمالات عندما تكون (ن) كبيرة، وإن كانت الاحتمالات بعد حد معين تتضاءل قيمتها جداً حتى لتكاد أن تتلاشى، إلا أننا نظل فى حاجة إلى حسابها.

ولذلك يمكن استخدام دالة التوزيع الطبيعىفى حساب الاحتمالات الخاصة بهذا التوزيع.

ولما كانت القيمة المتوقعة = التباين لهذا التوزيع فإن:

- الانحراف المعيارى $\delta = \sqrt{\delta^{٢}} = \sqrt{\mu} = \sqrt{ن \times ل}$

حيث أن μ= ن × ل

وبالتالى تحسب القيمة المعيارية (ى) كما يلى:

$$ى = \frac{س - ن \times ل}{\sqrt{ن \times ل}}$$

مثـال (١): إذا كانـت نسـبة الإنتـاج المعيـب فـى أحـد المصـانع ٢% سـحبت عينـة عشوائية من ٤٠ وحدة، احسب احتمال أن يكون ربع حجم العينـة علـى الأكثر من الوحدات المعيبة وبفرض أن توزيع الإنتاج المعيب يتبع توزيع بواسون.

الحــل

ن = ٤٠ ‏ ‏ ‏ ل = ٠.٠٢ ‏ ‏ ‏ μ = ن × ل = ٤٠ × ٠.٠٢ = ٠.٨

المطلوب: أن $\frac{١}{٤}$ حجم العينة على الأكثر وحدات معيبة ح (س ≤ ١٠)

لاحظ أننا لو استخدمنا دالة توزيع بواسون كان علينا أن نحسب:

$$ح_{(١٠)} + ح_{(٩)} + ح_{(٨)} + ... + ح_{(٠)}$$

أما باستخدام دالة التوزيع الطبيعى فإن:

$$ح (س \leq ١٠) = ح \left(ى \leq \frac{١٠ - ٤٠ \times ٠.٠٢}{\sqrt{٤٠ \times ٠.٠٢}} \right)$$

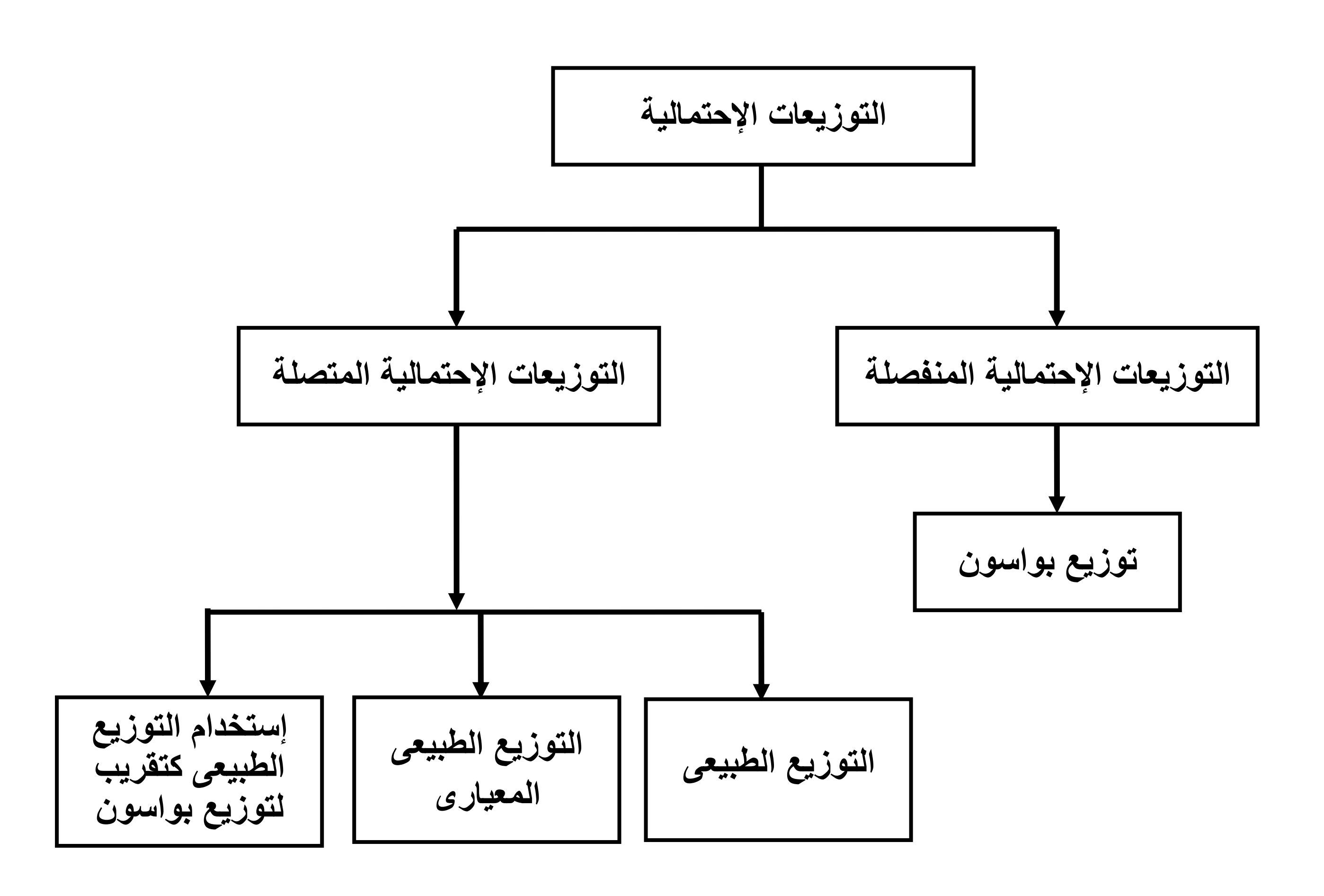
$$= ح (ى \leq ١٠.٢٩)$$

$$= ٠.٩٩٩٩٧$$

تدريب:

علـى الطالـب إيجـاد المطلـوب باسـتخدام دالـة توزيـع بواسـون وسـيجد أن الفرق بين الاحتمالين تقريباً (٠.٠٠٠٠٢) وهذا يؤكد علـى أهميـة اسـتخدام التوزيـع الطبيعى كتقريب لتوزيع بواسون.

الخلاصة



التوزيعات الإحتمالية
التوزيعات الإحتمالية المنفصلة
التوزيعات الإحتمالية المتصلة
توزيع بواسون
التوزيع الطبيعى
التوزيع الطبيعى المعيارى
إستخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع بواسون

تمارين على التوزيعات الاحتمالية

(١) فى دراسة عن دخل الفرد فى إحدى المدن تم اختيار عينة عشوائية من ١٠٠٠ فرد تبين منها أن متوسط الدخل الشهرى للفرد ٤٠٠ جنيه بانحراف معيارى ١٠٠ جنيه. فإذا علمت أن الدخل يتبع التوزيع الطبيعى، احسب ما يلى:

١- احتمال أن يبلغ الدخل الشهرى لأحد الأفراد ٦٠٠ جنيه على الأقل.

٢- احتمال أن يتراوح الدخل الشهرى لأحد الأفراد بين ٤٠٠ جنيه، ٦٠٠جنيه.

٣- عدد الأفراد الذين يبلغ دخلهم ٥٥٠ جنيه على الأكثر من بين أفراد العينة.

٤- عدد الأفراد الذين يتراوح دخلهم بين ٣٠٠ جنيه، ٣٥٠ جنيه.

٥- الدخل الشهرى الذى يبلغه أو يقل عنه دخل ٧٠% من عدد الأفراد بالعينة.

٦- الدخل الذى يزيد عنه دخل ٤٠% من عدد الأفراد بالعينة.

(٢) فى دراسة عن رأس المال العامل فى الشركات الصناعية بمدينة العاشر من رمضان تبين أن متوسط رأس المال ٥٠٠ مليون جنيه بانحراف معيارى ٢٠٠ مليون جنيه، فإذا علمت أن توزيع رأس المال العامل قريب جداً من التوزيع الطبيعى احسب ما يلى:

١- احتمال أن يبلغ رأس مال إحدى الشركات ٧٥٠ مليون جنيه على الأقل.

٢- احتمال أن يتراوح رأس مال إحدى الشركات بين ٦٠٠ مليون، ٨٠٠مليون جنيه.

٣- إذا اخترنا ١٠٠ شركة من بين هذه الشركات فما هو عدد الشركات التى يبلغ رأس مالها ٦٥٠ مليون جنيه على الأكثر من بين هذه الشركات.

٤- إذا اخترنا ١٠ شركات من هذه الشركات فما هو احتمال أن يتراوح إجمالى رأس مالها بين ٤٠٠٠ مليون، ٥٥٠٠ مليون جنيه.

٥- حدد قيمة رأس المال الذى يزيد عنه رأس مال ٧٥% من عدد الشركات.

٦- حدد قيمة رأس المال الذى يقل عنه رأس مال ٣٥% من عدد الشركات.

(٣) إذا علمت أن نسبة الإنتاج التالف فى أحد المصانع تبلغ ٣% فإذا سحبنا عينة من ١٠ وحدات من إنتاج المصنع وكان الإنتاج التالف يتبع توزيع بواسون، احسب ما يلى:

١- احتمال أن يكون بالعينة وحدتين على الأكثر تالفة.

٢- احتمال أن يكون بالعينة ٤ وحدات على الأقل تالفة.

(٤) سحبت ٥٠٠ عينة من إنتاج أحد المصانع وكل عينة مكونة من ٥ وحدات وتم اختبار هذه العينات فوجد أن توزيعها وفقاً لعدد الوحدات المعيبة فى كل عينة كما يلى:

عدد الوحدات المعيبة	صفر	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
عدد العينات	٣٥٠	١٠٠	٣٠	١٠	٧	٣	٥٠٠

والمطلوب:

١- حساب إجمالى عدد الوحدات المعيبة فى كل العينات.

٢- حساب متوسط عدد الوحدات المعيبة والانحراف المعيارى لعدد الوحدات المعيبة بالعينة.

٣- حساب احتمال إنتاج وحدة معيبة فى هذا المصنع.

٤- إذا اخترنا عينة من إنتاج المصنع وكان توزيع الوحدات المعيبة يتبع توزيع بواسون، احسب ما يلى:

١/٤ احتمال أن يكون بالعينة وحدتين على الأكثر معيبة.

٢/٤ احتمال أن يكون بالعينة وحدة على الأقل معيبة.

٣/٤ التوقع الرياضى والتباين لعدد الوحدات المعيبة بالعينة.

(٥) إذا علمت أنه من واقع سجلات الكلية تبين أن احتمال أن يحصل الطالب على بكالوريوس التجارة فى أربع سنوات يبلغ ٠.٨٥، فإذا اخترنا عينة من ١٠٠ طالب من الملتحقين بالكلية هذا العام وكان توزيع الطلاب يتبع توزيع ذو الحدين، احسب ما يلى:

١- احتمال أن يحصل ٧٠ طالب على الأكثر على بكالوريوس التجارة فى أربع سنوات.

٢- احتمال أن يحصل ٤٥ طالب على الأقل على بكالوريوس التجارة فى أربع سنوات.

٣- القيمة المتوقعة والتباين لعدد الطلاب الذين يحصلون على بكالوريوس التجارة فى أربع سنوات فى هذه العينة.

٤- احتمال أن يتراوح عدد الذين يحصلون على بكالوريوس التجارة فى أربع سنوات فى هذه العينة بين ٦٥، ٨٥ طالب.

٥- هل الاحتمالات السابقة حقيقية أم تقريبية ولماذا؟ وما هو الإجراء اللازم لتصحيحها إن كانت تقريبية؟

(٦) إذا كان احتمال وجود أخطاء فى إحدى صفحات كتاب الإحصاء ٤% فإذا علمت أن كتاب الإحصاء يحتوى على ٥٠٠ صفحة وأن توزيع الأخطاء يتبع توزيع بواسون، احسب ما يلى:

١- احتمال وجود أخطاء فى ٣٠٠ صفحة على الأقل.

٢- احتمال وجود أخطاء فى ٢٥٠ صفحة على الأكثر.

٣- احتمال أن تتراوح عدد الصفحات التى بها أخطاء بين ٣٥٠، ٤٥٠صفحة.

٤- القيمة المتوقعة والتباين لعدد الصفحات التى بها أخطاء بالكتاب.

الباب الخامس
نظرية التقديرات واختبارات الفروض الإحصائية
Estimation Theory & Tests of Statistical Hypothesis

الفصل الأول: نظرية التقديرات – تقدير معالم مجتمع
Estimation Theory

الفصل الثانى: إختبارات الفروض الإحصائية
Tests of Statistical Hypothesis

الأهداف السلوكية:

بعد دراسة موضوع هذا الباب يجب أن يكون الدارس قادراً على:

١- تحديد حجم العينة ومعرفة المعايير التى تحكم عملية تحديد حجم العينة.

٢- معرفة نظرية النهاية المركزية.

٣- تقدير معالم المجتمع إما بنقطة أو بفترة ثقة.

٤- أن يتعرف على توزيع (ت).

٥- يتعرف على الفرض الإحصائى وتطبيق خطوات الاختبار الإحصائى.

٦- يتعرف على الاختبارات التى تعتمد على عينة واحدة والاختبارات التى تعتمد على عينتين مستقلتين والاختبارات التى تعتمد على عينتين غير مستقلتين.

العناصر:

[١] الفصل الأول : نظرية التقديرات – تقدير معالم مجتمع.

١- تقدير متوسط مجتمع (μ) من خلال متوسط عينة ($\overline{س}$)

١/١ تقدير متوسط مجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للمجتمع (σ).

٢/١ تقدير متوسط مجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للعينة (ع).

٣/١ حجم العينة اللازم لتقدير متوسط المجتمع (μ).

٢- تقدير نسبة حدث فى مجتمع (ل) من خلال نسبة حدث فى العينة ($\hat{ل}$)

١/٢ إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب مع الإحلال.

٢/٢ إذا كان المجتمع محدود أو السحب بدون إحلال.

٣/٢ حجم العينة اللازم لتقدير نسبة حدث فى المجتمع (ل)

٣- تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطى مجتمعين ($\mu_1 - \mu_2$).

١/٣ التباين للمجتمعين σ_1^2 ، σ_2^2 معلومين.

٢/٣ التباين للمجتمعين مجهولين.

٤- تقدير فترة ثقة للفرق بين نسبتى حدث فى مجتمعين ($ل_1 - ل_2$).

[٢] الفصل الثانى : إختبارات الفروض الإحصائية :

١- الاختبارات التى تعتمد على عينة واحدة.

١/١ اختبار أن متوسط المجتمع يساوى قيمة معينة.

٢/١ اختبار أن نسبة حدث ما فى المجتمع (ل) تساوى قيمة معينة.

٢- الاختبارات التى تعتمد على عينتين مستقلتين.

١/٢ اختبار الفرق بين متوسطى مجتمعين.

٢/٢ اختبار الفرق بين نسبتى حدث فى مجتمعين.

[٣] الخلاصة.

[٤] تمارين على الباب الخامس .

الفصل الأول
نظرية التقديرات – تقدير معالم مجتمع
Estimation Theory – Estimating a Population Parameters

مقدمة:

لاشك أن الهدف من دراسة العينات هو الوصول إلى بعض الحقائق عن المجتمع الذى سحبت منه العينة، والتقديرات التى يمكن استخلاصها من بيانات العينة كثيرة من أهمها الوسط الحسابى ($\overline{س}$) ونسبة حدث معين ($\hat{ل}$) ويتم استخدامهما فى تقدير معالم المجتمع المقابلة أى الوسط الحسابى للمجتمع (μ) ونسبة حدث معين فى المجتمع (ل).

ولاشك أن هناك احتمال لاختلاف القيم المحسوبة من العينة عن القيم الحقيقية للمجتمع، ويتوقف مقدار هذا الاختلاف على حجم العينة. والارتباط بين مقدار الاختلاف وحجم العينة ارتباطاً عكسياً.

ويتم تقدير معالم المجتمع إما بنقطة أو بفترة ثقة.

التقدير بنقطة Point Estimation

ويعنى أن أى تقدير يتم حسابه من خلال العينة يعتبر ممثلاً للقيمة الحقيقية المناظرة له فى المجتمع، بمعنى أن متوسط العينة ($\overline{س}$) يعتبر تقديراً لمتوسط المجتمع (μ)، وكذلك تباين العينة ($ع^٢$) يعتبر تقديراً لتباين المجتمع ($\delta^٢$) وبالمثل فإن نسبة حدث فى العينة ($\hat{ل}$) تعتبر تقديراً لنسبة الحدث فى المجتمع (ل).

التقدير بفترة ثقة Confidence Interval Estimation

لاشك أن اعتبار أن متوسط العينة ($\overline{س}$) تقدير مناسب لمتوسط المجتمع (μ) أو ما أشرنا إليه بالتقدير بنقطة، يطرح تساؤلاً هاماً فماذا لو سحبنا عينة أخرى بنفس حجم العينة الأولى، وكان لها وسطاً حسابياً مختلفاً عن الوسط الحسابى للعينة الأولى، فأى المتوسطين يعتبر تقديراً مناسباً لمتوسط المجتمع، وبالطبع سيظل التساؤل مطروحاً لو سحبنا العديد من العينات المتساوية وحسبنا من خلالها الوسط الحسابى وكان لدينا المتوسطات: $\overline{س}_{١}$، $\overline{س}_{٢}$، $\overline{س}_{٣}$،...، $\overline{س}_{ن}$ فأى هذه المتوسطات يعتبر تقديراً مناسباً لمتوسط المجتمع (μ).

والإجابة على هذا التساؤل تكمن فى إيجاد حدود أو مدى أو فترة من القيم يمكن أن تقع بداخلها القيمة الحقيقية للمجتمع (μ) فبدلاً من أن نقول أن متوسط المجتمع يساوى قيمة معينة (وفقاً لأسلوب التقدير بنقطة) فإنه من الأفضل أن نقول أن متوسط المجتمع يقع بين قيمتين (حد أدنى وحد أعلى).

والوصول إلى قيمة هذين الحدين يكون من خلال نظرية النهاية المركزية.

أولاً: تقدير متوسط مجتمع (μ) من خلال متوسط عينة ($\overline{س}$):

١- تقدير متوسط مجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للمجتمع (δ):

سبق أن أشرنا إلى أنه من خلال نظرية النهاية المركزية فإن القيمة المعيارية (ى) تحسب من خلال العلاقة:

$$ى = \frac{\overline{س} - \mu}{خ(\overline{س})} = \frac{\overline{س} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{ن}}}$$

ومن خلال جدول التوزيع الطبيعى المعيارى نجد أن المساحة المحصورة (الاحتمال) بين ى $\leq$ -١.٩٦، ى $\geq$ ١.٩٦ تساوى ٩٥% من المساحة الكلية أسفل المنحنى الطبيعى أى أن ح (-١.٩٦ $\leq$ ى $\leq$ ١.٩٦) = ٠.٩٥

أى أن $ح\left(-ى_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{س}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{ن}}} \le ى_{\frac{\alpha}{2}}\right) = ١ - \alpha$

$$ح\left(-ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}} \le \bar{س} - \mu \le ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}}\right) = ١ - \alpha$$

$$ح\left(-\bar{س} - ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}} \le -\mu \le -\bar{س} + ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}}\right) = ١ - \alpha$$

$$ح\left[-\left(\bar{س} + ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}}\right) \le -\mu \le -\left(\bar{س} - ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}}\right)\right] = ١ - \alpha$$

$$ح\left(\bar{س} + ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}} \ge \mu \ge \bar{س} - ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}}\right) = ١ - \alpha$$

$$\boxed{ح\left(\bar{س} - ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}} \le \mu \le \bar{س} + ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}}\right) = ١ - \alpha}$$

وهذه العلاقة عبارة عن تقدير لمتوسط المجتمع (μ) بفترة ثقة أو درجة ثقة $١ - \alpha$

ويكون الحد الأدنى لفترة الثقة لمتوسط المجتمع $\bar{س} - ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}}$

والحد الأعلى لفترة الثقة لمتوسط المجتمع $\bar{س} + ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}}$

ويمكن أن نضع تقدير الوسط الحسابى للمجتمع فى الصورة التالية:

$$\boxed{\mu = \bar{س} \pm ى_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}}}$$

وهذه العلاقة تكون صحيحة فى الحالتين:

- أن يكون المتغير يتبع توزيعاً طبيعياً مهما كان حجم العينة.

- أن يكون المتغير يتبع توزيعاً آخر بشرط أن يكون حجم العينة كبيراً ($ن \geq ٣٠$).

٢- تقدير متوسط المجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للعينة (ع):

إذا كان انحراف المجتمع (δ) مجهولاً يمكن استخدام الانحراف المعيارى للعينة (ع) لحساب الخطأ العشوائى لمتوسط العينة حيث:

$$ع = \sqrt{\frac{١}{ن - ١}\left(مجـ س^{٢} - \frac{(مجـ س)^{٢}}{ن}\right)}$$

وهنا لابد أن نفرق بين حالتين:

١- إذا كان حجم العينة كبيراً ($ن \geq ٣٠$)

فإن التوزيع الاحتمالى لمتوسط العينة ($\overline{س}$) يعتبر توزيع طبيعى ومن ثم نستخدم القيمة المعيارية (ى) فى تقدير حدى الثقة لمتوسط المجتمع.

$$\mu = \overline{س} \pm ى_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$$

٢- إذا كان حجم العينة صغيراً ($ن < ٣٠$):

فى هذه الحالة فإن التوزيع الاحتمالى لمتوسط العينة ($\overline{س}$) سوف يتبع توزيع (ت)، ومن ثم نستخدم القيمة المعيارية الجدولية (ت) بدلاً من القيمة (ى) لتقدير حدى الثقة لمتوسط المجتمع:

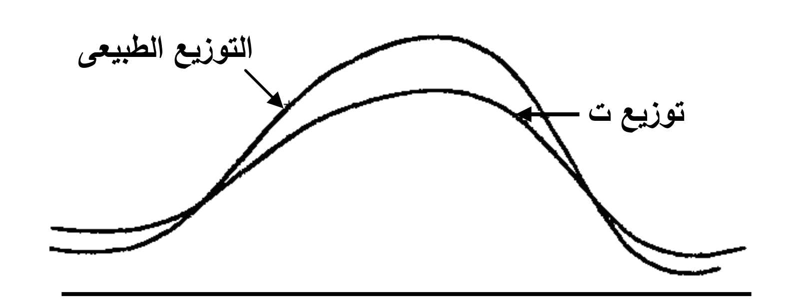
$$\mu = \overline{س} \pm ت_{(ن - ١،\ \frac{\propto}{٢})} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$$

$ت_{(ن - ١،\ \frac{\propto}{٢})}$ هى قيمة ت الجدولية بدرجات حرية = ن-١ ونصف مستوى المعنوية.

وتجدر الإشارة إلى أن كل العلاقات السابقة لتقدير متوسط المجتمع خاصة بمجتمعات غير محدودة أو أن السحب مع الإحلال، وفى حالة المجتمعات المحدودة أو أن السحب بدون إحلال فإنه يتم ضرب الخطأ العشوائى (المقام) × معامل التصحيح $\sqrt{\frac{\text{ن̂} - \text{ن}}{\text{ن̂} - ١}}$ بشرط أن تكون $\frac{\text{ن}}{\text{ن̂}} \leq$ ٠.٠٠٥ وبالطبع فإنه من الضرورى أن نتعرف على توزيع (ت) بصورة موجزة.

توزيع (ت) Student – t distribution

وهو توزيع احتمالى لمتغير عشوائى متصل يشبه التوزيع الطبيعى حيث أن توزيع (ت) متماثل حول محوره الرأسى إلا أنه أكثر تسطحاً أى تفرطحاً ومن ثم تقع قمته أسفل قمة التوزيع الطبيعى، كما يتضح من الشكل التالى:



ويعتمد شكل توزيع (ت) على حجم العينة (ن) فكلما زاد حجم العينة (ن تقترب من ٣٠) كلما خفت حدة تفرطح المنحنى، وأخذ فى التحدب حتى يقترب من شكل المنحنى الطبيعى، وقد ثبت أن التوزيع الاحتمالى لتوزيع الأوساط الحسابية للعينات الصغيرة، فى حالة عدم معرفة الانحراف المعيارى للمجتمع، له توزيع (ت) بشرط أن تكون المشاهدات الأصلية فى المجتمع لها توزيع طبيعى.

فإذا كان حجم العينة = ٢٥ فإن درجات الحرية = ٢٤

فإذا استخدمنا مستوى معنوية $\propto$ = ٥% مثلاً فإننا نحصل على قيمة $\text{ت}_{(٢٤،\ ٠.٠٢٥)}$ من الجدول أمام درجات حرية ٢٤ وتحت مستوى معنوية ٠.٠٢٥ (نصف مستوى المعنوية $\frac{\propto}{٢}$ أو تحت درجة ثقة ٠.٩٧٥ $\left(٩٥\% + \frac{\propto}{٢}\right)$

$ت_{(٢٤، ٠.٠٢٥)} = ٢.٠٦٤$

ويلاحظ أن قيمة (ت) الجدولية تتناقص بزيادة درجات الحرية إلى أن تصل درجات الحرية إلى ∞ نجد أن قيمة (ت) الجدولية تساوى قيمة (ى) الجدولية. والدالة الاحتمالية لهذا التوزيع تأخذ الصورة التالية:

$$ح(س) = أ \left(١ + \frac{س^{٢}}{ن}\right)^{\frac{-ن+١}{٢}} \qquad -\infty \leq س \leq \infty$$

مثال (١): أخذت عينة عشوائية حجمها ١٠٠ طالب من الكلية فوجد أن متوسط عمر الطالب ٢٠ سنة، فإذا علمت أن الانحراف المعيارى لعمر الطالب فى الكلية ٤ سنوات. المطلوب تقدير متوسط عمر الطالب فى الكلية عند مستوى معنوية ٥%.

الحـل

$\overline{س} = ٢٠ \qquad ن = ١٠٠ \qquad \delta = ٤ \qquad \propto = ٠.٠٥ \qquad ى_{\frac{\propto}{٢}} = \pm ١.٩٦$

$$\text{متوسط عمر الطالب فى الكلية } (\mu) = \overline{س} \pm ى_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}}$$

$$= ٢٠ \pm ١.٩٦ \times \frac{٤}{\sqrt{١٠٠}}$$

$$= ٢٠ \pm ٠.٧٨٤$$

∴ الحد الأدنى لمتوسط عمر الطالب فى الكلية= ٢٠ – ٠.٧٨٤ = ١٩.٢١٦سنة

والحد الأعلى لمتوسط عمر الطالب فى الكلية = ٢٠ + ٠.٧٨٤ = ٢٠.٧٨٤سنة

أى أن متوسط عمر الطالب فى الكلية يتراوح بين ١٩ سنة و٣شهور، ٢٠سنة و٩ شهور (تقريباً) بدرجة ثقة ٩٥%.

ومعنى ذلك أننا لو سحبنا ١٠٠ عينة وكل عينة مكونة من ١٠٠ طالب وحسبنا متوسط العمر فى كل عينة، وتم تقدير ١٠٠ فترة ثقة باستخدام متوسطات العينات المائة لوجدنا أن متوسط عمر الطالب فى الكلية (المجتمع) سيقع فى ٩٥ فترة ثقة من هذه الفترات المائة.

مثال (٢): سحبت عينة من ٢٠٠ طالب من طلبة إحدى الكليات العسكرية فوجد أن متوسط طول الطالب فى العينة ١٧٠سم بانحراف معيارى ١٥سم، المطلوب تقدير متوسط طول الطالب فى الكلية عند مستوى معنوية ١%.

الحـل

$\bar{\text{س}} = ١٧٠$ $\quad$ $\text{ن} = ٢٠٠$ $\quad$ $\text{ع} = ١٥$ $\quad$ $\propto = ١\%$ $\quad$ $\text{ى}_{\frac{\propto}{٢}} = \pm ٢.٥٨$

$$\text{متوسط طول الطالب فى الكلية } (\mu) = \bar{\text{س}} \pm \text{ى}_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}$$

لاحظنا أننا استخدمنا التوزيع الطبيعى المعيارى (ى) لأن ن $\leq$ ٣٠

$$= ١٧٠ \pm ٢.٥٨ \times \frac{١٥}{\sqrt{٢٠٠}}$$

$$= ١٧٠ \pm ٢.٧٤$$

∴ الحد الأدنى لمتوسط طول الطالب فى الكلية = ١٧٠ – ٢.٧٤ = ١٦٧.٢٦سم

والحد الأعلى لمتوسط طول الطالب فى الكلية = ١٧٠ + ٢.٧٤ = ١٧٢.٧٤ سم

أى أن متوسط طول الطالب فى الكلية يتراوح بين ١٦٧.٢٦ سم، ١٧٣ سم بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٣): سحبت عينة عشوائية من ٢٥ شخص من مستخدمى مترو الأنفاق على خط معين، فوجد أن متوسط عدد أيام استخدامهم للمترو ٢٠ يوم شهرياً بانحراف معيارى ٧ أيام، المطلوب تقدير متوسط عدد أيام استخدام المترو شهرياً على هذا الخط بدرجة ثقة ٩٥%.

الحـل

ن = ٢٥ $\bar{س}$ = ٢٠ ع = ٧ $\propto$ =٥% $ت_{(٢٤، ٠.٠٢٥)}$ =±٢.٠٦٤

انحراف المجتمع غير معلوم ∴ نستخدم توزيع (ت) حيث أن ن < ٣٠

متوسط عدد أيام الاستخدام (μ) = $\bar{س} \pm ت_{\left(ن - ١، \frac{\propto}{٢}\right)} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$

$= ٢٠ \pm ت_{(٢٤، ٠.٠٢٥)} \times \frac{٧}{\sqrt{٢٥}}$

$= ٢٠ \pm ٢.٠٦٤ \times \frac{٧}{\sqrt{٢٥}}$

$= ٢٠ \pm ٢.٨٩$

الحد الأدنى لمتوسط عدد أيام استخدام المترو شهرياً= ٢٠ – ٢.٨٩ =١٧.١١يوم

والحد الأعلى لمتوسط عدد أيام استخدام المترو شهرياً =٢٠+٢.٨٩=٢٢.٨٩يوم

ومعنى ذلك أن متوسط عدد أيام استخدام المترو تتراوح بين ١٧ يوم، ٢٣ يوم شهرياً بدرجة ثقة ٩٥%.

مثال (٤): مصنع لإنتاج اللمبات الكهربائية ينتج ١٠٠٠٠ لمبة فلوريسنت سنوياً تم سحب عينة منها حجمها ٥٠٠ لمبة وتم اختبار ساعات تشغيلها فوجد أن متوسط عمر اللمبة ١٥٠٠ ساعة بانحراف معيارى ٣٠٠ ساعة، ماذا تستنتج عن متوسط عمر اللمبة من إنتاج المصنع عند مستوى معنوية ١%.

الحـل

ن=١٠٠٠٠ ن=٥٠٠ $\bar{س}$=١٥٠٠ ع = ٣٠٠ $\propto$=٠.٠١ $ى_{\frac{\propto}{٢}}$=±٢.٥٨

انحراف المجتمع غير معلوم، ن ≤ ٣٠، ∴ نستخدم توزيع ى

ونظراً لأن المجتمع محدود وحجم العينة = ٠.٠٥ من حجم المجتمع

$\left(\frac{٥٠٠}{١٠٠٠٠} = ٠.٠٥\right)$ فإننا نستخدم معامل التصحيح للخطأ العشوائى.

متوسط عمر اللمبة فى المصنع (μ) = $\overline{س} \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}} \times \sqrt{\frac{\text{ن} - ن}{\text{ن} - ١}}$

$$= ١٥٠٠ \pm ٢.٥٨ \times \frac{٣٠٠}{\sqrt{٥٠٠}} \times \sqrt{\frac{١٠٠٠٠ - ٥٠٠}{١٠٠٠٠ - ١}}$$

$$= ١٥٠٠ \pm ٢.٥٨ \times \frac{٣٠٠}{٢٢.٣٦} \times ٠.٩٧٥$$

$$= ١٥٠٠ \pm ٣٣.٧٥$$

∴ الحد الأدنى لمتوسط عمر اللمبة فى المصنع

= ١٥٠٠ – ٣٣.٧٥ = ١٤٦٦.٢٥ ساعة

والحد الأعلى لمتوسط عمر اللمبة فى المصنع

= ١٥٠٠ + ٣٣.٧٥ = ١٥٣٣.٧٥ ساعة

أى أن متوسط عمر اللمبة فى المصنع يتراوح بين ١٤٦٦ ساعة، ١٥٣٤ساعة تقريباً بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٥): تم اختيار عينة من رواد أحد المطاعم الشهيرة حجمها ٢٠ فرد فوجد أن متوسط الدخل الشهرى للفرد ٢٧٠٠ جنيه بانحراف معيارى ٥٠٠جنيه، ماذا تستنتج عن متوسط الدخل الشهرى للفرد من رواد هذا المطعم عند درجة ثقة ٩٥% علماً بأن عدد رواد المطعم فى ذلك اليوم بلغ ٢٥٠ فرد.

الحـل

ن = ٢٥٠ ن = ٢٠ $\overline{س}$=٢٧٠٠ ع = ٥٠٠ α = ٠.٠٥

انحراف المجتمع غير معلوم، ن < ٣٠ ∴ نستخدم توزيع ت

وحيث أن المجتمع محدود وحجم العينة ≤ ٠.٠٥ ∴ نستخدم معامل التصحيح للخطأ العشوائى.

متوسط الدخل الشهرى للفرد من رواد المطعم (μ)

$$= \bar{\text{س}} \pm \text{ت}_{(\text{ن}-١،\ \frac{\propto}{٢})} \times \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}} \times \sqrt{\frac{\mathbf{ن} - \text{ن}}{\mathbf{ن} - ١}}$$

$$= ٢٧٠٠ \pm ٢.٠٩ \times \frac{٥٠٠}{\sqrt{٢٠}} \times \sqrt{\frac{٢٥٠ - ٢٠}{٢٥٠ - ١}}$$

$$= ٢٧٠٠ \pm ٢.٠٩ \times \frac{٥٠٠}{٤.٤٧٢} \times ٠.٩٦١$$

$$= ٢٧٠٠ \pm ٢٢٤.٥٦$$

∴ الحد الأدنى لمتوسط الدخل الشهرى

= ٢٧٠٠ − ٢٢٤.٥٦ = ٢٤٧٥.٤٤ جنيه

والحد الأعلى لمتوسط الدخل الشهرى

= ٢٧٠٠ + ٢٢٤.٥٦ = ٢٩٢٤.٥٦ جنيه

أى أن متوسط الدخل الشهرى للفرد من رواد المطعم يتراوح بين ٢٤٧٥، ٢٩٢٥ جنيه شهرياً بدرجة ثقة ٩٥%.

مثال (٦): لدراسة متوسط عدد أفراد الأسرة فى إحدى المدن تم اختيار عينة من ١٠٠ أسرة فوجد أن متوسط عدد أفراد الأسرة ٥ أفراد بانحراف معيارى ٣ أفراد ماذا تستنتج عن متوسط عدد أفراد الأسرة فى هذه المدينة عند درجة ثقة ٩٩%.

الحل

ن = ١٠٠ $\quad \bar{\text{س}} = ٥ \quad$ ع = ٣ $\quad \propto = ٠.٠١ \quad \text{ى}_{\frac{\propto}{٢}} = \pm ٢.٥٨$

انحراف المجتمع غير معلوم، ن ≤ ٣٠، ∴ نستخدم توزيع ى

$$\text{متوسط عدد أفراد الأسرة فى المدينة } (\mu) = \bar{\text{س}} \pm \text{ى}_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}$$

$$= ٥ \pm ٢.٥٨ \times \frac{٣}{\sqrt{١٠٠}}$$

$$= ٥ \pm ٠.٧٧٤$$

∴ الحد الأدنى لمتوسط عدد أفراد الأسرة فى المدينة

= ٥ − ٠.٧٧٤ = ٤.٢٢٦ فرد

والحد الأعلى لمتوسط عدد أفراد الأسرة فى المدينة

= ٥ + ٠.٧٧٤ = ٥.٧٧٤ فرد

أى أن متوسط عدد أفراد الأسرة فى المدينة يتراوح بين ٤، ٦ أفراد تقريباً بدرجة ثقة ٩٩%.

حجم العينة اللازم لتقدير متوسط المجتمع (μ):

إذا تصورنا أننا بصدد سحب عينة عشوائية بهدف حساب وسط حسابى $\overline{س}$ على ألا تختلف هذه القيمة ($\overline{س}$) عن القيمة الحقيقية للوسط الحسابى للمجتمع (μ) إلا بما لا يتعدى عدد معين من الدرجات وهو ما سبق أن أشرنا إليه بدرجة الدقة (د) وهذا يعنى أننا نود أن يؤدى حجم العينة الذى نختاره إلى عدم الاختلاف فى قيمة الوسط الحسابى للعينة ($\overline{س}$) عن الوسط الحسابى للمجتمع (μ) إلا بمقدار ±د، أى أن:

$$\mu = \overline{س} \pm د$$

وبمقارنة هذه العلاقة بعلاقة متوسط المجتمع (μ) خلال متوسط العينة ($\overline{س}$) أى الثقة لمتوسط المجتمع:

$$\mu = \overline{س} \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times خ(\overline{س})$$

فإن معنى ذلك أن:

$د = \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times خ(\overline{س})$ وقد سبق أن أشرنا إلى أنه :

١- **إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب مع الإحلال فإن:**

$$خ(\overline{س}) = \frac{\delta}{\sqrt{ن}}$$

وهذا يعنى أن:

$$د = \pm ى_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}}$$

$$د^{٢} = ى^{٢}_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{\delta^{٢}}{ن}$$

$$ن = \frac{ى^{٢}_{\frac{\propto}{٢}} \times \delta^{٢}}{د^{٢}}$$

(ى) = ١.٩٦ عند درجة ثقة ٩٥%، ى = ٢.٥٨ عند درجة ثقة ٩٩%

($\delta^{٢}$) تباين المجتمع وإذا كان مجهولاً يمكن استخدام تباين العينة ($ع^{٢}$) بدلاً من $\delta^{٢}$ مع ملاحظة أن:

$$ع^{٢} = \frac{١}{ن - ١}\left(مجـ س^{٢} - \frac{(مجـ س)^{٢}}{ن}\right)$$

(د) درجة الدقة فى التقديرات أو خطأ التقدير فى ($\overline{س}$) وهو خطأ يحدده الباحث مقدماً، وهو يختلف عن خطأ المعاينة خ($\overline{س}$) والذى يمثل الفرق بين متوسط عينة واحدة، ومتوسط المجتمع (مجهول غالباً) بينما درجة الدقة، كما سبق وأشرنا، فهى أقصى فرق مطلق بين متوسط العينة ومتوسط المجتمع من خلال عدد كبير جداً من العينات.

ن حجم العينة المقدر.

وإذا كنا نتوقع أن حجم العينة سيكون صغيراً (ن < ٣٠) فإنه يتم استخدام القيمة الجدولية (ت) بدلاً من القيمة (ى):

$$ن = \frac{ت^{٢}_{(ن-١،\ \frac{\propto}{٢})} \times \delta^{٢}}{د^{٢}}$$

٢- إذا كان المجتمع محدوداً أو السحب بدون إحلال فإن:

$$خ(\overline{س}) = \frac{\delta}{\sqrt{ن}} \times \sqrt{\frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - ١}}$$

ومن ثم فإن:

$$د = \pm ى_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{\delta}{\sqrt{ن}} \times \sqrt{\frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - ١}}$$

$$د^{٢} = \pm ى^{٢}_{\frac{\propto}{٢}} \times \frac{\delta^{٢}}{ن} \times \frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - ١}$$

وبإجراء بعض العمليات الرياضية نصل إلى أن:

$$ن^{*} = \frac{ن}{١ + \frac{ن}{\mathbf{ن}}}$$

$$حيث\ ن = \frac{ى^{٢}_{\frac{\propto}{٢}} \times \delta^{٢}}{د^{٢}}$$

مثال (١): أوجد حجم العينة اللازم لتقدير متوسط الوزن لطلبة الكلية إذا كنا نرغب ألا يختلف هذا المتوسط عن المتوسط الحقيقى فى المجتمع بأكثر من ٣كجم وبدرجة ثقة ٩٥% إذا علمت أن الوزن متغير عشوائى يتبع التوزيع الطبيعى وتباينه ٥٠كجم.

الحـل

د = ٣   ١ − α = ٩٥% $ى_{\frac{\alpha}{2}}$ = ±١.٩٦ δ^2 = ٥٠

$$ن = \frac{ى^{2}_{\frac{\alpha}{2}} \times \delta^2}{د^2} = \frac{(١.٩٦)^2 \times (٥٠)^2}{(٣)^2} =$$ ٢١ مفردة تقريباً

ومعنى ذلك أنه إذا سحبنا عينة حجمها ٢١ مفردة فإننا نكون واثقين بدرجة ٩٥% أن متوسط وزن الطالب فى هذه العينة لن يختلف إلا بمقدار ±٣كجم عن متوسط الوزن الحقيقى فى المجتمع الذى سحبت منه العينة.

مثال (٢): مجتمع يتكون من ١٠٠٠٠ مفردة ما هو حجم العينة اللازم سحبه لتقدير الوسط الحسابى ($\overline{س}$) بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى تقدير ($\overline{س}$) عن وحدتين وذلك بدرجة ثقة ٩٩%، علماً بأن الانحراف المعيارى فى عينة استطلاعية بلغ ١٠ وحدات.

الحـل

ن = ١٠٠٠٠   د = ٢   ع = ١٠   ١−α=٩٩% $ى_{\frac{\alpha}{2}}$ = ±٢.٥٨

وحيث أن المجتمع محدود فإن:

$$ن^{*} = \frac{ن}{١ + \frac{ن}{N}}$$

$$ن = \frac{ى^{2}_{\frac{\alpha}{2}} \times \delta^2}{د^2} = \frac{(٢.٥٨)^2 \times (١٠)^2}{(٢)^2} =$$ ١٦٦ مفردة تقريباً

ثم نقوم بعملية التصحيح لحجم العينة حيث أن المجتمع محدود

$$ن^{*} = \frac{١٦٦}{١ + \frac{١٦٦}{١٠٠٠٠}} =$$ ١٦٣ مفردة تقريباً

∴ حجم العينة اللازم = ١٦٣ مفردة.

ثانياً: تقدير نسبة حدث فى مجتمع (ل) من خلال نسبة حدث فى العينة ($\hat{ل}$):

كما توصلنا لحدى فترة الثقة لمتوسط المجتمع (μ) باستخدام متوسط العينة ($\overline{س}$) يمكن أن نصل إلى حدى الثقة لنسبة حدث فى المجتمع (ل) من خلال نسبة حدث فى العينة ($\hat{ل}$) كما يلى :

نسبة المجتمع = نسبة العينة ± القيمة المعيارية عند درجة ثقة ($1 - \propto$)

× الخطأ المعيارى للتقدير

$$ل = \hat{ل} \pm ى_{\frac{\propto}{2}} \times خ(\hat{ل})$$

١- إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب مع الإحلال فإن:

$$خ(\hat{ل}) = \sqrt{\frac{\hat{ل}\,(1 - \hat{ل})}{ن}}$$

ومن ثم يصبح حدى الثقة لتقدير نسبة حدث فى المجتمع:

$$ل = \hat{ل} \pm ى_{\frac{\propto}{2}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}\,(1 - \hat{ل})}{ن}}$$

٢- إذا كان المجتمع محدود أو السحب بدون إحلال فإن:

$$خ(\hat{ل}) = \sqrt{\frac{\hat{ل}\,(1 - \hat{ل})}{ن} \times \frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - 1}}$$

ومن ثم فإن حدى الثقة لتقدير نسبة حدث فى المجتمع:

$$ل = \hat{ل} \pm ى_{\frac{\propto}{2}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}\,(1 - \hat{ل})}{ن} \times \frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - 1}}$$

مثال (١): فى دراسة لمعرفة نسبة الأسر التى لديها جهاز فيديو فى إحدى المدن تم اختيار عينة من ٥٠٠ أسرة فوجد منها ٣٠٠ أسرة لديها جهاز فيديو، قدر بدرجة ثقة ٩٥% نسبة الأسر التى لديها جهاز فيديو فى هذه المدينة.

الحـل

ن = ٥٠٠ $\hat{ل}$ = $\frac{٣٠٠}{٥٠٠}$ = ٠.٦ ١−∝=٩٥% $ى_{\frac{∝}{٢}}$ =±١.٩٦ ل=؟

$$ل = \hat{ل} \pm ى_{\frac{∝}{٢}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}(١-\hat{ل})}{ن}}$$

$$= ٠.٦ \pm ١.٩٦ \times \sqrt{\frac{٠.٦ \times ٠.٤}{٥٠٠}}$$

= ٠.٦ ± ٠.٠٠٤

∴ الحد الأدنى للنسبة فى المجتمع = ٠.٦ − ٠.٠٠٤ = ٠.٥٦

الحد الأعلى للنسبة فى المجتمع = ٠.٦ + ٠.٠٠٤ = ٠.٦٤

ومعنى ذلك أن نسبة الأسر لديها جهاز فيديو فى هذه المدينة تتراوح بين ٥٦%، ٦٤% بدرجة ثقة ٩٥%.

مثال (٢): فى دراسة أعدها اتحاد الإذاعة والتليفزيون لمعرفة نسبة المشاهدة لأحد البرامج الجماهيرية الهامة تم سحب عينة من ١٠٠٠ أسرة من مدينة القاهرة تبين منها أن ٧٠٠ أسرة تتابع هذا البرنامج، المطلوب تقدير نسبة الأسر التى تتابع هذا البرنامج فى مدينة القاهرة بدرجة ثقة ٩٩%.

الحـل

ن = ١٠٠٠ $\hat{ل}$= $\frac{٧٠٠}{١٠٠٠}$ = ٠.٧ ١−∝=٩٩% $ى_{\frac{∝}{٢}}$ =±٢.٥٨ ل=؟

$$ل = \hat{ل} \pm ى_{\frac{∝}{٢}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}(١-\hat{ل})}{ن}}$$

$$= ٠.٧ \pm ٢.٥٨ \times \sqrt{\frac{٠.٧ \times ٠.٣}{١٠٠٠}}$$

= ٠.٧ ± ٠.٠٠٤

∴ الحد الأدنى للنسبة فى المجتمع = ٠.٧ − ٠.٠٠٤ = ٠.٦٦

والحد الأعلى فى المجتمع = ٠.٧ + ٠.٠٤ = ٠.٧٤

أى أن نسبة المشاهدين لهذا البرنامج فى مدينة القاهرة تتراوح بين ٦٦%، ٧٤% بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٣): لمعرفة نسبة الحاصلين على تقدير جيد جداً أو ممتاز فى مادة الإحصاء بالفرقة الثالثة البالغ عددها ١٠٠٠٠ طالب تم سحب عينة من هؤلاء الطلبة حجمها ٢٠٠ طالب وجد من بينهم ٥٠ طالب حاصلون على تقدير جيد جداً أو ممتاز، قدر بدرجة ثقة ٩٥% نسبة الطلاب الحاصلين على تقدير جيد جداً أو ممتاز فى مادة الإحصاء.

الحـل

$$\text{ن} = ١٠٠٠٠ ،\ \text{ن} = ٢٠٠ \quad \hat{\text{ل}} = \frac{٥٠}{٢٠٠} = ٠.٢٥ \quad ١-\alpha = ٩٥\% \quad \text{ى} = \pm ١.٩٦$$

$$\frac{\text{ن}}{\text{ن}} = \frac{٢٠٠}{١٠٠٠٠} = ٠.٠٢$$ على الرغم من أن المجتمع محدود إلا أن

نسبة العينة < ٠.٠٥ وبالتالى يمكن إهمال معامل التصحيح.

$$\text{ل} = \hat{\text{ل}} \pm \text{ى}_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{\hat{\text{ل}}\,(١-\hat{\text{ل}})}{\text{ن}}}$$

$$= ٠.٢٥ \pm ١.٩٦ \times \sqrt{\frac{٠.٢٥ \times ٠.٧٥}{٢٠٠}}$$

$$= ٠.٢٥ \pm ٠.٠٦$$

∴ الحد الأدنى للنسبة فى المجتمع = ٠.٢٥ − ٠.٠٦ = ٠.١٩

والحد الأعلى للنسبة فى المجتمع = ٠.٢٥ + ٠.٠٦ = ٠.٣١

أى أن نسبة الحاصلين على تقدير جيد جداً أو ممتاز فى مادة الإحصاء بالفرقة الثالثة بالكلية تتراوح بين ١٩%، ٣١% بدرجة ثقة ٩٥%.

مثال (٤): فى المثال السابق بفرض أنه تم سحب عينة من ٦٠٠ طالب وجد من بينهم ١٦٢ طالب حاصلون على تقدير جيد جداً أو ممتاز فى مادة الإحصاء المطلوب تقدير نسبة الحاصلين على هذا التقدير فى مادة الإحصاء بدرجة ثقة ٩٩%.

$$\text{ن} = ١٠٠٠٠ \quad ن = ٦٠٠ \quad \hat{ل} = \frac{١٦٢}{٦٠٠} = ٠.٢٧ \quad \frac{ن}{\text{ن}} = \frac{٦٠٠}{١٠٠٠٠} = ٠.٠٦$$

$$١ - \propto = ٩٩\% \qquad ى_{\frac{\propto}{٢}} = \pm ٢.٥٨$$

المجتمع محدود ونسبة العينة > ٠.٠٠٥، ∴ نستخدم معامل التصحيح.

$$ل = \hat{ل} \pm ى_{\frac{\propto}{٢}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}\,(١ - \hat{ل})}{ن} \times \frac{\text{ن} - ن}{\text{ن} - ١}}$$

$$= ٠.٢٧ \pm ٢.٥٨ \times \sqrt{\frac{٠.٢٧ \times ٠.٧٣}{٦٠٠} \times \frac{١٠٠٠٠ - ٦٠٠}{١٠٠٠٠ - ١}}$$

$$ل = ٠.٢٧ \pm ٠.٠٤٥$$

∴ الحد الأدنى للنسبة فى المجتمع = ٠.٢٧ − ٠.٠٤٥ = ٠.٢٢٥

والحد الأعلى للنسبة فى المجتمع = ٠.٢٧ + ٠.٠٤٥ = ٠.٣١٥

ومعنى ذلك أن نسبة الحاصلين على تقدير جيد جداً أو ممتاز فى مادة الإحصاء بالفرقة الثالثة تتراوح بين ٢٢.٥%، ٣١.٥% بدرجة ثقة ٩٩%.

حجم العينة اللازم لتقدير نسبة حدث فى المجتمع (ل):

سبق أن توصلنا عند تحديد حجم العينة اللازم لتقدير متوسط المجتمع إلى أن:

درجة الدقة= القيمة المعيارية عند درجة ثقة (١ − ∝) × الخطأ المعيارى للتقدير

$$د = ى_{\frac{\propto}{٢}} \times خ(\hat{ل})$$

١- إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب مع الإحلال فإن:

$$\text{خ}(\hat{\text{ل}}) = \sqrt{\frac{\text{ل}\,(\text{١} - \text{ل})}{\text{ن}}}$$

$$\text{د} = \text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \sqrt{\frac{\text{ل}\,(\text{١} - \text{ل})}{\text{ن}}}$$

$$\text{د}^{\text{٢}} = \text{ى}^{\text{٢}}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \frac{\text{ل}\,(\text{١} - \text{ل})}{\text{ن}}$$

$$\text{ن} = \frac{\text{ى}^{\text{٢}}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \text{ل}\,(\text{١} - \text{ل})}{\text{د}^{\text{٢}}}$$

٢- إذا كان المجتمع محدود أو السحب بدون إحلال فإن:

$$\text{خ}(\hat{\text{ل}}) = \sqrt{\frac{\text{ل}\,(\text{١} - \text{ل})}{\text{ن}} \times \frac{\mathbf{\text{ن}} - \text{ن}}{\mathbf{\text{ن}} - \text{١}}}$$

$$\text{د} = \text{ى}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \sqrt{\frac{\text{ل}\,(\text{١} - \text{ل})}{\text{ن}} \times \frac{\mathbf{\text{ن}} - \text{ن}}{\mathbf{\text{ن}} - \text{١}}}$$

$$\text{د}^{\text{٢}} = \text{ى}^{\text{٢}}_{\frac{\propto}{\text{٢}}} \times \frac{\text{ل}\,(\text{١} - \text{ل})}{\text{ن}} \times \frac{\mathbf{\text{ن}} - \text{ن}}{\mathbf{\text{ن}} - \text{١}}$$

وبإجراء بعض العمليات الرياضية نصل إلى أن:

$$\text{ن}^{*} = \frac{\text{ن}}{\text{١} + \frac{\text{ن}}{\mathbf{\text{ن}}}}$$

مع ملاحظة أن استخدام نسبة حدث فى المجتمع (ل) فى حساب حجم العينة يعتبر أمراً يصعب تحقيقه فى أغلب الأحوال، لذلك نفترض أن هذه النسبة ٠.٥ حتى نحصل على أكبر حجم للعينة.

وإذا كانت النسبة فى المجتمع تأخذ مدى معين كأن يكون من المتوقع عند دراسة مستوى الأمية فى مجتمع ما أن تتراوح بين ٢٠%، ٤٠%، فى هذه الحالة تؤخذ النسبة الأقرب إلى ٥٠% أى (ل = ٠.٤٠).

وتجدر الإشارة إلى أن هناك جداول تبين أقصى حجم ممكن للعينة بدلالة درجة الدقة المطلوبة للنسبة ل وبدلالة درجة الثقة (١ − ∝).

مثال (١): إذا علمت أن عدد طلاب الكلية ٣٠٠٠٠ طالب، ما هو حجم العينة اللازم سحبها لتقدير نسبة الطلبة الذين يزيد عمرهم عن ٢٠ سنة إذا كان هناك اعتقاد بأن هذه النسبة تتراوح بين ١٥%، ٣٠% من طلبة الكلية، بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى تقدير هذه النسبة عن ٢% وبدرجة ثقة ٩٥%.

الحـل

ن = ٣٠٠٠٠ ل تتراوح بين ١٥%، ٣٠%

ل = ٠.٣٠ لأنها الأقرب إلى ٠.٥٠

د = ٠.٠٢ $١ - \propto = ٩٥\%$ $ى_{\frac{\propto}{٢}} = ١.٩٦$

$$ن = \frac{ى^{٢}_{\frac{\propto}{٢}} \times ل\,(١ - ل)}{د^{٢}} = \frac{(١.٩٦)^{٢} \times ٠.٣ \times ٠.٧}{(٠.٠٢)^{٢}}$$

= ٢٠١٧ طالب

وحيث أن حجم المجتمع معلوم ∴ لابد من إجراء عملية التصحيح لحجم العينة

$$ن^{*} = \frac{ن}{١ + \frac{ن}{\textbf{ن}}} = \frac{٢٠١٧}{١ + \frac{٢٠١٧}{٣٠٠٠٠}} = ١٨٩٠ \text{ طالب}$$

مثال (٢): ما هو حجم العينة اللازم سحبه من إحدى المدن لتقدير نسبة الأمية فيها بشرط أن تكون درجة الدقة فى هذه النسبة فى حدود ٣% وبدرجة ثقة ٩٩%.

الحـل

د = ٠.٠٠٣ ل = ٠.٥ (لأن نسبة المجتمع غير معلومة)

$١ - \propto = ٩٩\%$ $ى_{\frac{\propto}{٢}} = ٢.٥٨$

$$ن = \frac{ى^{٢}_{\frac{\propto}{٢}} \times ل\ (١ - ل)}{د^{٢}} = \frac{(٢.٥٨)^{٢} \times ٠.٥ \times ٠.٥}{(٠.٠٠٣)^{٢}}$$

= ١٨٤٩ شخص

ثالثاً: تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطى مجتمعين ($\mu_١ - \mu_٢$)

يمكن إيجاد فترة ثقة للفرق بين متوسطى مجتمعين من خلال سحب عينة من المجتمع الأول حجمها $ن_١$، ووسطها الحسابى $\overline{س}_١$ وعينة من المجتمع الثانى حجمها $ن_٢$، ووسطها الحسابى $\overline{س}_٢$، وباستخدام الفرق بين متوسطى العينتين يمكن تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطى مجتمعين كما يلى:

الفرق بين متوسطى مجتمعين = الفرق بين متوسطى عينتين ± القيمة المعيارية عند درجة ثقة (١ − ∝) × الخطأ المعيارى

١- التباين للمجتمعين $\delta_١^٢$، $\delta_٢^٢$ معلومين:

$$\mu_١ - \mu_٢ = (\overline{س}_١ - \overline{س}_٢) \pm ى_{\frac{\propto}{٢}} \times \sqrt{\frac{\delta_١^٢}{ن_١} + \frac{\delta_٢^٢}{ن_٢}}$$

نستخدم القيمة المعيارية (ى) مهما كان حجم العينتين طالما كانت الظاهرة محل الدراسة تتبع التوزيع الطبيعى، وإذا كانت تتبع توزيعاً آخر نستخدم (ى) أيضاً بشرط أن $ن_١$، $ن_٢ \geq ٣٠$

٢- التباين للمجتمعين مجهولين:

فى هذه الحالة نستخدم التباين للعينين $ع_١^٢$ ، $ع_٢^٢$

$$\mu_١ - \mu_٢ = (\overline{س}_١ - \overline{س}_٢) \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}$$

نستخدم القيمة المعيارية (ى) بشرط أن تكون $ن_١$، $ن_٢ \geq ٣٠$.

إما إذا كانت $ن_١$، $ن_٢ < ٣٠$ فإننا نستخدم القيمة المعيارية (ت) بدلاً من (ى).

حيث $ت_{\left(ن_١ + ن_٢ - ٢،\ \frac{\alpha}{٢}\right)}$ أى بدرجات حرية = مجموع العينتين -٢ ونصف مستوى المعنوية.

والعلاقات السابقة صحيحة طالما كان المجتمعان غير محدودين أو أن السحب منهما يتم مع الإحلال.

أما إذا كان المجتمعان محدودين أو أن السحب يتم بدون إحلال فإننا نستخدم معامل التصحيح:

$$\sqrt{\frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - ٢}}$$ حيث $\mathbf{ن} = \mathbf{ن}_١ + \mathbf{ن}_٢$ ، $ن = ن_١ + ن_٢$

ويمكن كتابته على الصورة التالية:

$$\frac{\mathbf{ن}_١ + \mathbf{ن}_٢ - (ن_١ + ن_٢)}{\mathbf{ن}_١ + \mathbf{ن}_٢ - ٢}$$

بشرط أن تكون:

$$\frac{ن_١ + ن_٢}{\mathbf{ن}_١ + \mathbf{ن}_٢} \geq ٠.٠٥$$

مثال (١): فى دراسة لمعرفة متوسط استهلاك الكهرباء فى بعض مدن الجمهورية، تم سحب عينة من مدينة القاهرة حجمها ٢٠٠ أسرة فوجد أن متوسط استهلاك الأسرة ١٥٠ كيلووات شهرياً بانحراف معيارى ٥٠ كيلووات، وسحبت عينة من مدينة بنها حجمها ١٠٠ أسرة فوجد أن متوسط استهلاك الأسرة ٩٠كيلووات شهرياً بانحراف معيارى ٣٠ كيلووات. المطلوب، تقدير الفرق بين متوسطى استهلاك الأسرة من الكهرباء شهرياً بين المدينتين وبدرجة ثقة ٩٥%.

الحـل

القاهرة: $ن_١ = ٢٠٠$ ، $\overline{س}_١ = ١٥٠$ $ع_١ = ٥٠$

بنها : $ن_٢ = ١٠٠$ ، $\overline{س}_٢ = ٩٠$ $ع_٢ = ٣٠$

$ن_١، ن_٢ \geq ٣٠$ ∴ نستخدم القيمة المعيارية (ى)

$$\mu_١ - \mu_٢ = (\overline{س}_١ - \overline{س}_٢) \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}$$

$$= (١٥٠ - ٩٠) \pm ١.٩٦ \times \sqrt{\frac{(٥٠)^٢}{٢٠٠} + \frac{(٣٠)^٢}{١٠٠}}$$

$$= ٦٠ \pm ١.٩٦ \times ٤.٦٣٧$$

$$= ٦٠ \pm ٩.١$$

∴ الحد الأدنى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٦٠ - ٩.١ = ٥٠.٩$ كيلووات

والحد الأعلى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٦٠ + ٩.١ = ٦٩.١$ كيلووات

ومعنى ذلك أن الفرق بين متوسط استهلاك الأسرة من الكهرباء شهرياً فى مدينة القاهرة ومتوسط استهلاك الأسرة فى مدينة بنها يتراوح بين ٥١، ٦٩ كيلووات تقريباً.

مثال (٢): فى دراسة لمعرفة متوسط عمر اللمبات الكهربائية فى بعض المصانع، تم سحب عينة من المصنع (أ) حجمها ٥٠٠ لمبة فوجد أن متوسط عمر اللمبة ١٣٠٠ ساعة، وسحبت عينة من المصنع (ب) حجمها ٤٠٠ لمبة فوجد أن متوسط عمر اللمبة ١٥٠٠ ساعة، فإذا علمت أن الانحراف المعيارى لعمر اللمبة فى المصنع (أ) ٢٠٠ ساعة وفى المصنع (ب) ١٥٠ ساعة، المطلوب تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسط عمر اللمبة فى المصنعين عند مستوى معنوية ١%.

الحـل

المصنع (أ): $\text{ن}_1 = ٥٠٠$ ، $\bar{\text{س}}_1 = ١٣٠٠$ $\delta_1 = ٢٠٠$

المصنع (ب): $\text{ن}_2 = ٤٠٠$ ، $\bar{\text{س}}_2 = ١٥٠٠$ $\delta_2 = ١٥٠$

تبايناً المجتمعين معلومان ∴ نستخدم القيمة المعيارية (ى)

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2) \pm \text{ى}_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\delta_1^2}{\text{ن}_1} + \frac{\delta_2^2}{\text{ن}_2}}$$

$$= (١٣٠٠ - ١٥٠٠) \pm ٢.٥٨ \times \sqrt{\frac{(٢٠٠)^2}{٥٠٠} + \frac{(١٥٠)^2}{٤٠٠}}$$

$= ٢٠٠ \pm ٢.٥٨ \times ١١.٦٧٣$ لاحظ أننا نأخذ الفرق المطلق (+)

$= ٢٠٠ \pm ٣٠.١١$

∴ الحد الأدنى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٢٠٠ - ٣٠.١١ = ١٦٩.٨٩$ ساعة

والحد الأعلى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٢٠٠ + ٣٠.١١ = ٢٣٠.١١$ ساعة

أى أن الفرق بين متوسطى عمر اللمبة فى المصنعين يتراوح بين ١٧٠ ساعة، ٢٣٠ ساعة، وذلك بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٣): المطلوب حل المثال السابق بفرض أن إنتاج المصنع (أ) من هذه اللمبات ١٠٠٠٠ لمبة وإنتاج المصنع (ب) منها ٧٠٠٠ لمبة.

الحـل

المجتمعان محدودان:

$\mathbf{ن}_1 = ١٠٠٠٠$ $\qquad$ $\mathbf{ن}_2 = ٧٠٠٠$ $\qquad$ $\mathbf{ن} = \mathbf{ن}_1 + \mathbf{ن}_2 = ١٧٠٠٠$

$ن_1 = ٥٠٠$ $\qquad$ $ن_2 = ٤٠٠$ $\qquad$ $ن = ن_1 + ن_2 = ٩٠٠$

النسبة $\frac{٩٠٠}{١٧٠٠٠} = ٠.٠٥٣ \geq ٠.٠٥$ ∴ نستخدم معامل التصحيح

$$\mu_1 - \mu_2 = (\overline{س}_1 - \overline{س}_2) \pm ى_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{ن_1} + \frac{\delta_2^2}{ن_2} \times \frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - ٢}}$$

$$= ٢٠٠ \pm ٢.٥٨ \sqrt{\frac{(٢٠٠)^2}{٥٠٠} + \frac{(١٥٠)^2}{٤٠٠} \times \frac{١٧٠٠٠ - ٩٠٠}{١٧٠٠٠ - ٢}}$$

$$= ٢٠٠ \pm ٢٩.٣$$

∴ الحد الأدنى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٢٠٠ - ٢٩.٣ = ١٧٠.٧$ ساعة

والحد الأعلى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٢٠٠ + ٢٩.٣ = ٢٢٩.٣$ ساعة

أى أن الفرق بين متوسط عمر اللمبة فى المصنعين يتراوح بين ١٧١، ٢٢٩ ساعة بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٤): فى دراسة لمعرفة متوسط درجات مادة الإحصاء لكل من الطلبة والطالبات سحبت عينة من الطلبة حجمها ٢٥ طالب فوجد أن متوسط درجاتهم فى مادة الإحصاء ١٦ درجة بانحراف معيارى درجة واحدة، وسحبت عينة من الطالبات حجمها ٢٠ طالبة فوجد أن متوسط درجاتهن فى مادة الإحصاء ١٤ درجة بانحراف معيارى درجتين، المطلوب تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسط الدرجات فى مادة الإحصاء بين الطلبة والطالبات بدرجة ثقة ٩٥%.

الحـل

الطلبة : $ن_١ = ٢٥$ ، $\overline{س}_١ = ١٦$ $ع_١ = ١$

الطالبات: $ن_٢ = ٢٠$ ، $\overline{س}_٢ = ١٤$ $ع_٢ = ٢$

$ن_١$، $ن_٢ < ٣٠$ وتباينا المجتمعين مجهولان، ∴ نستخدم توزيع (ت) بدلاً من التوزيع الطبيعى.

$$١ - \propto = ٠.٩٥ \quad ت_{\left(ن_١ + ن_٢ - ٢، \frac{\propto}{٢}\right)} = ت_{(٤٣، ٠.٠٢٥)} = ٢.٠٢١$$

$$\mu_١ - \mu_٢ = (\overline{س}_١ - \overline{س}_٢) \pm ت_{(٤٣، ٠.٠٢٥)} \times \sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}$$

$$= (١٦ - ١٤) \pm ٢.٠٢١ \times \sqrt{\frac{(١)^٢}{٢٥} + \frac{(٢)^٢}{٢٠}}$$

$$= ٢ \pm ٢.٠٢١ \times ٠.٤٩ = ٢ \pm ١$$

∴ الحد الأدنى للفرق بين متوسطى المجتمعين = ٢ – ١ = ١ درجة واحدة

والحد الأعلى للفرق بين متوسطى المجتمعين = ٢ + ١ = ٣ درجات

أى أن الفرق بين متوسط درجات الطلبة والطالبات فى مادة الإحصاء يتراوح بين درجة واحدة وثلاث درجات بدرجة ثقة ٩٥%

مثال (٥): سحبت عينتان حجم كل منهما ١٠٠ عامل من مصنعين وكان توزيع هؤلاء العمال حسب فئات العمر كما يلى:

فئات العمر	٢٠–	٣٠–	٤٠–	٥٠–	٥٥–٦٠	المجموع
عدد عمال المصنع (أ)	١٢	١٨	٣٨	٢٢	١٠	١٠٠
عدد عمال المصنع (ب)	٨	٢٢	٣٥	٢٧	٨	١٠٠

<u>المطلوب</u>: تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسط عمر العامل فى المصنعين بدرجة ثقة ٩٩%.

الحـل

نبدأ أولاً بحساب كل من الوسط الحسابى والتباين لكل عينة

فئات	مراكز الفئات(س)	$ك_1$	س ك	$س^2ك_1$	$ك_2$	$س ك_2$	$س^2ك_2$
٢٠-	٢٥	١٢	٣٠٠	٧٥٠٠	٨	٢٠٠	٥٠٠٠
٣٠-	٣٥	١٨	٦٣٠	٢٢٠٥٠	٢٢	٧٧٠	٢٦٩٥٠
٤٠-	٤٥	٣٨	١٧١٠	٧٦٩٥٠	٣٥	١٥٧٥	٧٠٨٧٥
٥٠-	٥٢.٥	٢٢	١١٥٥	٦٠٦٣٧.٥	٢٧	١٤١٧.٥	٧٤٤١٨٠.٧٥
٥٥-٦٠	٥٧.٥	١٠	٥٧٥	٣٣٠٦٣٠	٨	٤٦٠	٢٦٤٥٠
المجموع		١٠٠	٤٣٧٠	٢٠٠٢٠٠	١٠٠	٤٤٢٢.٥	٢٠٣٦٩٣.٧٥

$$\overline{س}_1 = \frac{\text{مجـ س ك}_1}{\text{مجـ ك}_1} = \frac{٤٣٧٠}{١٠٠} = ٤٣.٧$$

$$ع_1^2 = \frac{١}{\text{مجـ ك}_1 - ١}\left(\text{مجـ س}^2\text{ك}_1 - \frac{(\text{مجـ س ك}_1)^2}{\text{مجـ ك}_1}\right)$$

$$= \frac{١}{٩٩}\left(٢٠٠٢٠٠ - \frac{(٤٣٧٠)^2}{١٠٠}\right)$$

$$ع_1^2 = ٩٣.٢٤$$

$$\overline{س}_2 = \frac{\text{مجـ س ك}_2}{\text{مجـ ك}_2} = \frac{٤٤٢٢.٥}{١٠٠} = ٤٤.٢٢٥$$

$$ع_2^2 = \frac{١}{\text{مجـ ك}_1 - ١}\left(\text{مجـ س}^2\text{ك}_2 - \frac{(\text{مجـ س ك}_2)^2}{\text{مجـ ك}_2}\right)$$

$$= \frac{١}{٩٩}\left(٢٠٣٦٩٣.٧٥ - \frac{(٤٤٢٢.٥)^2}{١٠٠}\right)$$

$ع_٢^٢ = ٨١.٩١$

$$\mu_١ - \mu_٢ = (\bar{س}_١ - \bar{س}_٢) \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}$$

$$= (٤٣.٧ - ٤٤.٢٢٥) \pm ٢.٥٨ \times \sqrt{\frac{٩٣.٢٤}{١٠٠} + \frac{٨١.٩١}{١٠٠}}$$

$$= ٠.٥٢٥ \pm ٣.٤١٤$$

∴ الحد الأدنى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٠.٥٢٥ - ٣.٤١٤ = ٢.٨٨٩$ سنة

والحد الأعلى للفرق بين متوسطى المجتمعين

$= ٠.٥٢٥ + ٣.٤١٤ = ٣.٩٣٩$ سنة

ومعنى ذلك أن الفرق بين متوسط العمر للعاملين فى المصنعين يتراوح بين ٣ سنوات، ٤ سنوات تقريباً بدرجة ثقة ٩٩%.

رابعاً: تقدير فترة ثقة للفرق بين نسبتى حدث فى مجتمعين ($ل_١ - ل_٢$):

إذا كان لدينا مجتمعين ونود معرفة الفرق بين نسبة حدث معين فى المجتمعين نسحب عينة من المجتمع الأول حجمها $ن_١$، ونحسب نسبة الحدث فيها $\hat{ل}_١$، ونسحب عينة من المجتمع الثانى حجمها $ن_٢$ ونحسب نسبة الحدث $\hat{ل}_٢$ وبالتالى فإن حدى الثقة للفرق بين نسبتى حدث معين فى مجتمعين كما يلى:

$$ل_١ - ل_٢ = (\hat{ل}_١ - \hat{ل}_٢) \pm ى_{\frac{\alpha}{٢}} \times \sqrt{\frac{\hat{ل}_١ (١-\hat{ل}_١)}{ن_١} + \frac{\hat{ل}_٢ (١-\hat{ل}_٢)}{ن_٢}}$$

مع ملاحظة استخدام معامل التصحيح $\sqrt{\frac{\mathbf{ن} - ن}{\mathbf{ن} - ٢}}$ إذا كان المجتمعان محدودين أو أن السحب منهما يتم بدون إرجاع، حيث:

$\mathbf{ن} = \mathbf{ن}_١ + \mathbf{ن}_٢$، $ن = ن_١ + ن_٢$، ويشترط أن $\frac{ن_١ + ن_٢}{\mathbf{ن}_١ + \mathbf{ن}_٢} \leq ٠.٠٥$

مثال (١): لمعرفة نسبة الأمية فى بعض مدن الجمهورية سحبت عينة من ٣٠٠شخص من مدينة طنطا فوجد أن منها ٥٠ شخص أمياً، وسحبت عينة من ٢٠٠ شخص من مدينة المحلة الكبرى فوجد منها ٤٠ شخص أمياً، المطلوب تقدير فترة للفرق بين نسبة الأمية فى المدينتين بدرجة ثقة ٩٥%.

الحـل

طنطا: $\text{ن}_1 = ٣٠٠$ $\qquad \hat{\text{ل}}_1 = \frac{٥٠}{٣٠٠} = ٠.١٧$

المحلة الكبرى : $\text{ن}_2 = ٢٠٠$ $\qquad \hat{\text{ل}}_2 = \frac{٤٠}{٢٠٠} = ٠.٢٠$

$١ - \alpha = ٩٥\%$ $\qquad \text{ى}_{\frac{\alpha}{2}} = \pm ١.٩٦$

$$\text{ل}_1 - \text{ل}_2 = (\hat{\text{ل}}_1 - \hat{\text{ل}}_2) \pm \text{ى}_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\hat{\text{ل}}_1(1-\hat{\text{ل}}_1)}{\text{ن}_1} + \frac{\hat{\text{ل}}_2(1-\hat{\text{ل}}_2)}{\text{ن}_2}}$$

$$= (٠.١٧ - ٠.٢٠) \pm ١.٩٦ \times \sqrt{\frac{٠.١٧ \times ٠.٨٣}{٣٠٠} + \frac{٠.٢٠ \times ٠.٨٠}{٢٠٠}}$$

$$= ٠.٠٣ \pm ١.٩٦ \times ٠.٠٣٥$$

$$= ٠.٠٣ \pm ٠.٠٧$$

∴ الحد الأدنى للفرق بين نسبتى المجتمعين

$= ٠.٠٣ - ٠.٠٧ = ٠.٠٤$

والحد الأعلى للفرق بين نسبتى المجتمعين

$= ٠.٠٣ + ٠.٠٧ = ٠.١٠$

أى أن الفرق بين النسبتين يتراوح بين ٤% بدرجة ثقة ٩٥%.

مثال (٢): لمعرفة نسبة الحاصلين على شهادة الثانوية العامة من المدارس الحكومية من طلبة السنة الأولى بالكلية نظامى وانتساب موجه سحبت عينة من طلبة النظامى حجمها ٥٠٠ طالب وجد من بينهم ٣٠٠ من طلبة المدارس الحكومية، وسحبت عينة من طلبة الانتساب الموجه حجمها ٣٥٠ طالب وجد منهم ١٥٠ طالب من المدارس الحكومية، فإذا علمت أن الطلبة المقبولين بالفرقة الأولى نظامى ٥٠٠٠ طالب، والمقبولين بالفرقة الأولى انتساب موجه ٤٠٠٠ طالب، المطلوب تقدير فترة ثقة للفرق بين نسبة طلاب المدارس الحكومية الملتحقين بالفرقة الأولى نظامى وانتساب موجه بالكلية عند مستوى معنوية ١%.

الحـل

نظامى: $\mathbf{N}_1 = \text{٥٠٠٠} \qquad n_1 = \text{٥٠٠} \qquad \hat{\text{ل}}_1 = \dfrac{\text{٣٠٠}}{\text{٥٠٠}} = \text{٠.٦}$

انتساب موجه: $\mathbf{N}_2 = \text{٤٠٠٠} \qquad n_2 = \text{٣٥٠} \qquad \hat{\text{ل}}_2 = \dfrac{\text{١٥٠}}{\text{٣٥٠}} = \text{٠.٤٣}$

$\mathbf{N} = \text{٩٠٠٠} \qquad n = \text{٨٥٠}$

المجتمعين محدودين ونسبة العينتين $\dfrac{n_1 + n_2}{\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2} = \dfrac{\text{٨٥٠}}{\text{٩٠٠٠}}$

$= \text{٠.٠٩٤} > \text{٠.٠٠٥}$

∴ نستخدم معامل التصحيح، $\alpha = \text{٠.٠١}$، $\text{ى}_{\frac{\alpha}{2}} \pm \text{٢.٥٨}$

$$\text{ل}_1 - \text{ل}_2 = (\hat{\text{ل}}_1 - \hat{\text{ل}}_2) \pm \text{ى}_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\hat{\text{ل}}_1(1-\hat{\text{ل}}_1)}{n_1} + \frac{\hat{\text{ل}}_2(1-\hat{\text{ل}}_2)}{n_2} \times \frac{\mathbf{N} - n}{\mathbf{N} - 2}}$$

$$= (\text{٠.٦٠} - \text{٠.٤٣}) \pm \text{٢.٥٨} \times \sqrt{\frac{\text{٠.٦٠} \times \text{٠.٤٠}}{\text{٥٠٠}} + \frac{\text{٠.٤٣} \times \text{٠.٥٧}}{\text{٣٥٠}} \times \frac{\text{٩٠٠٠} - \text{٨٥٠}}{\text{٩٠٠٠} - 2}}$$

$= \text{٠.١٧} \pm \text{٢.٥٨} \times \text{٠.٠٣٣}$

$= \text{٠.١٧} \pm \text{٠.٠٨}$

∴ الحد الأدنى للفرق بين نسبتى المجتمعين

$= \text{٠.١٧} - \text{٠.٠٨} = \text{٠.٠٩}$

والحد الأعلى للفرق بين نسبتى المجتمعين

$= \text{٠.١٧} + \text{٠.٠٨} = \text{٠.٢٥}$

أى أن الفرق بين نسبة طلبة المدارس الحكومية بين طلاب النظامى والانتساب الموجه بالفرقة الأولى فى الكلية يتراوح بين ٩%، ٢٥% بدرجة ثقة ٩٩%.

الفصل الثانى

إختبارات الفروض الإحصائية

Tests of Statistical Hypothesis

مقدمة :

ويطلق عليها البعض اختبارات المعنوية Significant Tests وقبل أن نتعرف على خطوات وأنواع اختبارات الفروض الإحصائية سنتعرف على بعض المصطلحات الهامة.

القرار الإحصائى Statistical Decision

قد يجد الباحث نفسه مضطراً لاتخاذ قرار بشأن أحد معالم المجتمع اعتماداً على ما يتوافر لديه من قياسات مشابهة من خلال عينة مسحوبة من هذا المجتمع، فمثلاً إذا كان متوسط عمر الطالب فى إحدى الكليات ٢٠ سنة، واخترنا عينة ووجدنا أن متوسط عمر الطالب ٢٢ سنة فيها مثلاً، هنا لابد من الإجابة على تساؤل حول الفرق الظاهر بين متوسط المجتمع (μ) ومتوسط العينة ($\overline{س}$)، هل هو راجع للصدفة أى فرق عشوائى ناتج عن استخدام أسلوب العينة، أم أن هذا الفرق جوهرى يرجع إلى عوامل وأسباب جوهرية وحقيقية.

والقرار المتخذ فى هذا الشأن يسمى القرار الإحصائى أما الخطوات أو الإجراءات التى تمكن الباحث من اتخاذ هذا القرار فهى اختبارات الفروض الإحصائية أو اختبارات المعنوية.

الفرض الإحصائى: Statistical Hypothesis

وهو عبارة عن تفسير أو تحديد مبدئى للمشكلة، وقد يكون هذا التفسير صحيحاً وقد يكون خاطئاً، وهذا التحديد المبدئى يعرف بالفرض العدمى Null Hypothesis ونشير إليه بالرمز ض$_{صفر}$ وغالباً ما تتم صياغة هذا الفرض على أساس أن الهدف من الاختبار هو رفض الفرض العدمى، فإذا كنا بصدد اختبار تأثير نوع معين من الدواء على نسبة شفاء المرضى بمرض معين فإن الفرض العدمى هو أن الدواء غير فعال أو ليس له تأثير، وإذا كنا بصدد اختبار تأثير الحملات الإعلانية على مبيعات منتج معين، فإن الفرض العدمى يصاغ على أساس، أنه لا تأثير لهذه الحملات على نسبة المبيعات من هذا المنتج.

ومن ثم فإن الفرض العدمى يقوم على أساس أن العينة التى سحبت من المجتمع هى عينة عشوائية ممثلة له وأن الاختلاف بين نتائج العينة والمجتمع هى اختلافات غير جوهرية أو غير معنوية وترجع إلى عوامل عشوائية راجعة لاستخدامنا لأسلوب العينة وأن هذه الاختلافات تتغير قيمتها واتجاهها (موجب/ سالب) بتغير العينات حتى تتلاشى أو تنعدم تلك الاختلافات فى حالة سحب عدد كبير جداً من العينات.

أما الفرض المقابل للفرض العدمى فيسمى الفرض البديل Alternative Hypothesis ويرمز له بالرمز ض$_{١}$ وهو تفسير مغاير أو معاكس للفرض العدمى.

وبعد تطبيق خطوات الاختبار الإحصائى نصل إلى قرار إما بقبول الفرض العدمى وهو ما يعنى ضمنياً رفض الفرض البديل، أو رفض الفرض العدمى وهو ما يعنى قبول الفرض البديل.

أداة الاختبار الإحصائى (المختبر الإحصائى) Test Statistic

لكى نصل إلى قرار إحصائى بشأن قبول أو رفض الفرض العدمى فإنه يلزم الاستعانة بوسيلة أو أداة أو علاقة رياضية تربط بين قيمة معلمة المجتمع التى نريد اختبارها وبين نظيرتها فى العينة، وهذه العلاقة عبارة عن متغير عشوائى له دالة كثافة احتمال مثل دالة ذو الحدين أو بواسون أو التوزيع الطبيعى أو ..

وبالتالى فإنه يمكن مقارنة المختبر الإحصائى (أداة الاختبار) مع القيمة الجدولية للتوزيع الاحتمالى الذى تتبعه هذه العلاقة، وقد سبق أن تعرضنا لتوزيعين معياريين هما التوزيع الطبيعى وقيمته المعيارية الجدولية هى (ى)، وتوزيع (ت) وقيمته المعيارية الجدولية هى (ت)، ومن ثم فإنه يمكن أن نطلق على أداة الاختبار الإحصائى أو المختبر الإحصائى لفظ (ى) أو (ت) المحسوبة والتى نقارنها بقيمة (ى) أو (ت) الجدولية.

ومن خلال هذه المقارنة يمكن أن نصل إلى قرار إحصائى بقبول أو رفض الفرض العدمى.

مستوى المعنوية Level of Significance

لابد أن يرتبط اتخاذ قرار القبول أو الرفض للفرض العدمى بحدود معينة للخطأ يمكن تحملها لأن هذا القرار يعتمد فى الأساس على بيانات عينة وهى عرضة للخطأ، وحدود الخطأ الشائعة الاستخدام هى ٥%، ١% ويطلق عليها البعض احتمالات الخطأ ويرمز لها بالرمز ($\propto$)، فالقول بأن مستوى المعنوية $\propto$ = ٥% معناه أن احتمال أن يتخذ الباحث قراراً خاطئاً هو ٥% وهذا يعنى أن الباحث سيكون واثقاً بنسبة ٩٥% أن قراره سيكون صحيحاً.

المنطقة الحرجة Critical Region

ويطلق عليها أيضاً منطقة الرفض وهى المساحة الاحتمالية التى تقابل مستوى المعنوية ($\propto$) تحت المنحنى بحيث إذا وقعت قيمة المختبر الإحصائى (ى أو ت) داخل هذه المنطقة تم رفض الفرض العدمى، أما إذا وقعت تلك القيمة خارج هذه المنطقة أى فى منطقة القبول تم قبول الفرض العدمى.

والمنطقة الحرجة إما أن تقع فى أحد طرفى المنحنى (يمين أو شمال) أو تقع على طرفى المنحنى، وهذا يعتمد على نوع الاختبار الإحصائى والذى ينقسم إلى:

١- اختبار الطرفين Two Tailed Test

وفيه توزع المنطقة الحرجة أو منطقة الرفض ($\propto$) بالتساوى على طرفى المنحنى وتحسب القيمة المعيارية على أساس ± ى$_{\frac{\propto}{٢}}$ أو ± ت$_{(ن - ١، \frac{\propto}{٢})}$

٢- اختبار الطرف الأيمن Right Tailed Test

وفيه تقع المنطقة الحرجة أو منطقة الرفض ($\propto$) فى الطرف الأيمن من المنحنى الاحتمالى وتحسب القيمة المعيارية الموجبة + ى$_{\propto}$ أو + ت$_{(ن-١، \propto)}$.

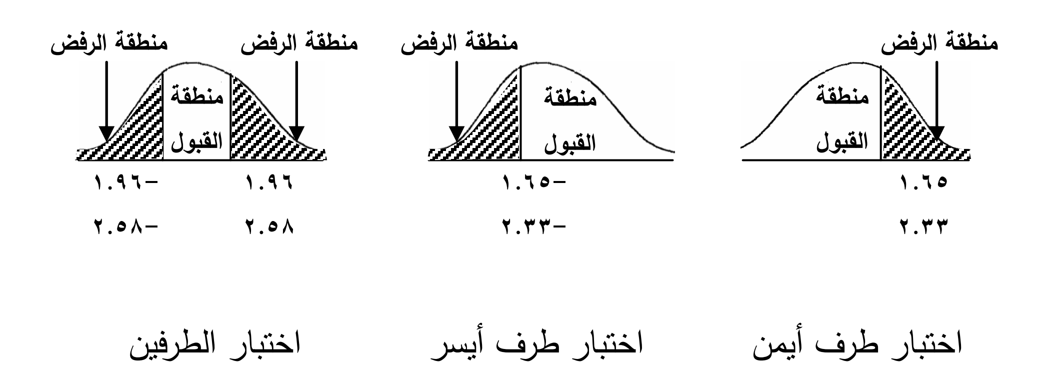
٣- اختبار الطرف الأيسر Left tailed test

وفيه تقع المنطقة الحرجة أو منطقة الرفض ($\propto$) أو فى الطرف الأيسر من المنحنى الاحتمالى وتحسب القيمة المعيارية السالبة –ى$_{\propto}$ أو –ت$_{(ن-١، \propto)}$.

والقيمة المعيارية الجدولية للتوزيع الطبيعى (ى) تختلف باختلاف نوع الاختبار ومستوى المعنوية كما يتضح من الجدول التالى:

مستوى المعنوية	اختبار طرف أيمن	اختبار طرف أيسر	اختبار الطرفين
α = ٥%	ى$_{\alpha}$ = +١.٦٥	ى$_{\alpha}$ = −١.٦٥	ى$_{\frac{\alpha}{2}}$ = ±١.٩٦
α = ١%	ى$_{\alpha}$ = +٢.٣٣	ى$_{\alpha}$ = −٢.٣٣	ى$_{\frac{\alpha}{2}}$ = ±٢.٥٨

وتتحدد هذه القيم المعيارية على شكل المنحنى فى الاختبارات الثلاثة كما يتضح من الأشكال التالية:



اختبار طرف أيمن   اختبار طرف أيسر   اختبار الطرفين

ويتوقف اختيار نوع الاختبار على طبيعة الفرض البديل، فإذا كنا نبحث فى تأثير دواء معين فإن الفرض العدمى يتمثل فى عدم تأثير هذا الدواء، ويأخذ الفرض البديل أحد الأشكال التالية:

١- للدواء تأثير إيجابى على نسبة شفاء المرضى (اختبار طرف أيمن).

١- للدواء تأثير سلبى على نسبة شفاء المرضى (اختبار طرف أيسر).

٢- للدواء تأثير على نسبة المرضى (اختبار طرفين) حيث لم يتحدد اتجاه التأثير.

خطوات الاختبار الإحصائى:

بعد استعراض المفاهيم الأساسية لاختبارات الفروض الإحصائية يمكن أن نلخص خطوات الاختبار فى الاتى:

١- تحديد الفرض العدمى المطلوب اختباره والفرض البديل له مع تحديد نوع الاختبار المناسب للفرض البديل، هل هو اختبار طرفين أم اختبار واحد وهل هو طرف أيمن أم أيسر.

٢- تحديد أداة الاختبار (المختبر الإحصائى) ونقصد بها قيمة (ى) أو (ت) المحسوبة من خلال البيانات المتوفرة عن المجتمع والعينة ثم تحديد التوزيع الاحتمالى للمختبر الإحصائى.

٣- تحديد مستوى المعنوية ($\propto$) ومنها نحدد المنطقة الحرجة (منطقة الرفض) ومنطقة القبول.

٤- مقارنة قيمة أداة الاختبار [ى أو ت المحسوبة] بالقيمة الجدولية للتوزيع الاحتمالى [ى أو ت الجدولية] فإذا وقعت القيمة المحسوبة فى منطقة الرفض نرفض الفرض العدمى ونقبل الفرض البديل والعكس صحيح إذا وقعت القيمة المحسوبة فى منطقة القبول نقبل الفرض العدمى ونرفض الفرض البديل.

ونود أن نشير بإيجاز وقبل البدء فى التعرف على أنواع الاختبارات الإحصائية إلى أنه جرت العادة على أن يكون الفرض العدمى (ض.) فى صورة أن مؤشر المجتمع (μ أو ل) = قيمة معينة وأن الفرض البديل (ض$_{١}$) يكون أحد الصور التالية:

- أن مؤشر المجتمع (μ أو ل) ≠ هذه القيمة (اختبار طرفين).
- أن مؤشر المجتمع (μ أو ل) > هذه القيمة (اختبار طرف أيمن).
- أن مؤشر المجتمع (μ أو ل) < هذه القيمة (اختبار طرف أيسر).

ومع ذلك فهناك من يفضل أن يضع الفرض العدمى فى صياغة عكس صياغة الفرض البديل فمثلاً إذا كان الهدف اختبار أن دواء معين يزيد من نسبة شفاء المرضى، كان معنى ذلك أن الفرض البديل أن مؤشر المجتمع > قيمة معينة، وهنا يصاغ الفرض العدمى أن مؤشر المجتمع ≤ قيمة معينة وتجدر الإشارة إلى أن هذا الاختلاف لا يؤثر فى القرار الإحصائى ومن ثم فإننا سوف نتبع الأسلوب الأول أى وضع الفرض العدمى دائماً فى صيغة (=) بينما الفرض البديل إما أن يكون (≠) أو (>) أو (<) حسب نوع الاختبار.

وسوف نعرض فيما يلى لأهم أنواع الاختبارات الإحصائية والتى يمكن أن نصفها كما يلى:

١- اختبارات تعتمد على عينة واحدة.

٢- اختبارات تعتمد على عينتين مستقلتين.

٣- اختبارات تعتمد على عينتين غير مستقلتين (القراءات المزدوجة).

وذلك فى الحالتين:

١- حجم العينة كبير ن ≥ ٣٠ Large sample size

٢- حجم العينة صغير ن < ٣٠ Small sample size

أولاً: الاختبارات التى تعتمد على عينة واحدة One Sample Tests

تهدف الدراسات الميدانية والتجارب المعملية إلى معرفة تأثير دواء معين أو نوع معين من السماد أو نوع معين من أغذية المرضى، أو نظام جديد للعمل أو المكافآت أو تأثير حملات إعلانية على مبيعات منتج معين أو .. ولتحقيق أى من هذه الأهداف يقوم الباحث باختيار عينة عشوائية من مجتمع الدراسة ثم إخضاعها للمؤثر الذى تهدف الدراسة إلى معرفة تأثيره على مفردات المجتمع، ثم يتم قياس

نتائج العينة ($\overline{س}$ أو $\hat{ل}$) ثم نقارن بين نتائج العينة ومؤثرات المجتمع (μ أو ل) وبالطبع سيكون هناك اختلاف بين متوسط العينة ($\overline{س}$) ومتوسط المجتمع (μ) وكذلك بين نسبة حدث ما فى العينة ($\hat{ل}$) ونسبة الحدث فى المجتمع (ل)، وهذا الاختلاف يمثل سبب إجراء الاختبار والمتمثل فى معرفة هل هذا الفرق (الاختلاف) يرجع إلى المؤثر الذى نبحث فى تأثيره، أم هو فرق عشوائى يرجع للصدفة. ويتحقق ذلك كما سبق وأشرنا من خلال خطوات الاختبار الإحصائى السابق الإشارة إليها. ونأتى إلى الاختبارات التى تتم من خلال عينة واحدة.

١- اختبار أن متوسط المجتمع يساوى قيمة معينة :

One Sample Test for Mean

وفى هذه الحالة لابد أن نفرق بين عدة حالات:

١/١ تباين المجتمع (أو الانحراف المعيارى δ) معلوم أم غير معلوم.

٢/١ العينة كبيرة (ن ≤ ٣٠) أم صغيرة (ن > ٣٠).

٣/١ الاختبار خاص بالطرفين أم اختبار طرف واحد (أيمن أم أيسر).

١/١ تباين المجتمع (δ^2) معلوم: Population Variance is Known

فى هذه الحالة نستخدم المختبر الإحصائى للتوزيع الطبيعى (ى):

$$\text{قيمة المختبر الإحصائى (ى المحسوبة)} = \frac{\overline{س} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{ن}}}$$

طالما كان التوزيع الاحتمالى يتبع التوزيع الطبيعى ومهما كان حجم العينة، أما إذا كان التوزيع الاحتمالى يتبع توزيع آخر فيشترط أن يكون حجم العينة كبيراً ن ≤ ٣٠.

٢/١ تباين المجتمع (δ^2) غير معلوم:

Population Variance is Unknown

فى هذه الحالة نستخدم تباين العينة $ع^2$ بدلاً من تباين المجتمع ونستخدم التوزيع الطبيعى طالما كان حجم العينة كبيراً ن ≤ ٣٠ ومن ثم يصبح المختبر الإحصائى كما يلى:

$$\text{المختبر الإحصائى (ى المحسوبة)} = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

أما إذا كان حجم العينة صغيراً (ن < ٣٠) فإننا نستخدم توزيع (ت) بدلاً من توزيع (ى) بشرط أن يكون التوزيع الاحتمالى للظاهرة محل الدراسة يتبع التوزيع الطبيعى، ومن ثم يصبح المختبر الإحصائى كما يلى:

$$\text{المختبر الإحصائى (ت المحسوبة)} = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{\delta \text{ أو } ع}{\sqrt{ن}}}$$

ثم نتابع خطوات الاختبار الإحصائى كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثـال (١): إذا كـان متوسـط إنتـاج العامـل فـى أحـد المصـانع ٦٠ قطعـة يوميـاً بـانحراف معيـارى ١٥ قطعـة، تـم اختيـار عينـة مـن ١٠٠ عامـل وتـم إخضـاعهم لبرنامج تدريبى معين، وتبين بعد البرنامج أن متوسط إنتاج العامل منهم ٦٥ قطعة يومياً. هل تعتقد أن التدريب أدى إلى رفع إنتاجية العامل عند درجة ثقة ٩٥%.

الحـل

μ = ٦٠ ن = ١٠٠ $\bar{س}$ = ٦٥ $\propto$ = ٩٥%

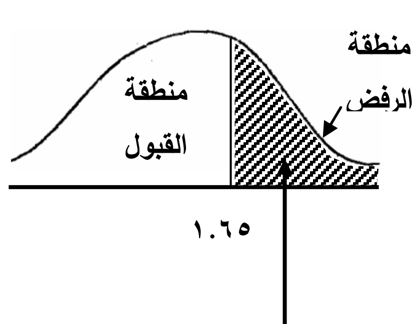
الفرض العدمى (ض.): μ = ٦٠

الفرض البديل (ض١): μ > ٦٠

اختبار طرف أيمن ى٠.٠٥ = ١.٦٥

انحراف المجتمع (δ) معلوم ن ≥ ٣٠

∴ نستخدم التوزيع الطبيعى (ى)



نحسب القيمة المعيارية (ى المحسوبة):

$$\text{(ى المحسوبة)} = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{ن}}} = \frac{٦٥ - ٦٠}{\frac{١٥}{\sqrt{١٠٠}}} = ٣.٣٣$$

نحدد القيمة الجدولية $ى_{٠.٠٥}$ = ١.٦٥

وحيث أن ى المحسوبة > ى الجدولية ∴ تقع فى منطقة الرفض

وبالتالى نرفض الفرض العدمى ونقبل الفرض البديل أى نقبل الفرض القائل بأن التدريب رفع من إنتاجية العامل بدرجة ثقة ٩٥%.

مثال (٢): سحبت عينة من طلبة الكلية حجمها ١٥٠ طالب فوجد أن متوسط طول الطالب ١٦٥سم بانحراف معيارى ١٢سم، اختبر الفرض القائل بأن العينة مسحوبة من مجتمع متوسط طول الطالب فيه ١٦٧سم عند درجة ثقة ٩٩%.

الحل

μ = ١٦٧ ن = ١٥٠ $\bar{س}$ = ١٦٥ ع = ١٢

انحراف العينة معلوم ولكن ن ≤ ٣٠ ∴ نستخدم التوزيع الطبيعى

الفرض العدمى (ض.): μ = ١٦٧

الفرض البديل (ض١): μ ≠ ١٦٧ اختبار طرفين

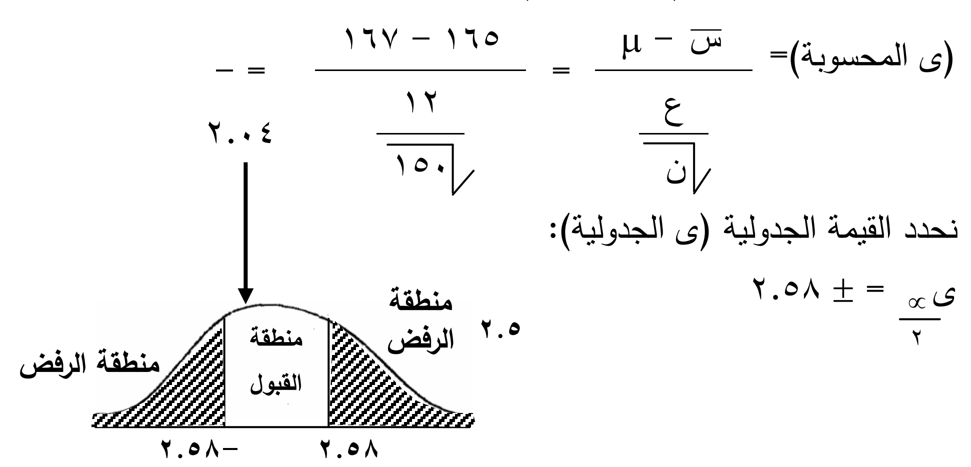
$\propto$ = ١% $ى_{\frac{\propto}{٢}}$ = ± ٢.٥٨

تحسب القيمة المعيارية (ى المحسوبة):

$$\text{(ى المحسوبة)} = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}} = \frac{١٦٥ - ١٦٧}{\frac{١٢}{\sqrt{١٥٠}}} = -٢.٠٤$$

نحدد القيمة الجدولية (ى الجدولية):

$$ى_{\frac{\alpha}{2}} = \pm ٢.٥٨$$



وحيث أن |ى| المحسوبة < |ى| الجدولية أى تقع فى منطقة القبول،

∴ نقبل الفرض العدمى ونرفض البديل أى نقبل بالفرض القائل بأن العينة مسحوبة من مجتمع متوسط طول الطالب فيه ١٦٧سم بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال(٣): إذا كان متوسط إنتاج الفدان من الذرة فى إحدى المحافظات ٢٨ أردب بانحراف معيارى ٣ أردب تم استخدام نوع جديد من التقاوى المعالج بالهندسة الوراثية فى مساحة قدرها ٢٥ فدان فبلغ متوسط إنتاج الفدان ٣٢ أردب، اختبر الفرض القائل بأن نوع التقاوى الجديد أدى إلى زيادة إنتاجية الفدان بدرجة ثقة ٩٩% علماً بأن إنتاج الفدان من الذرة يتبع توزيعاً طبيعياً.

الحل

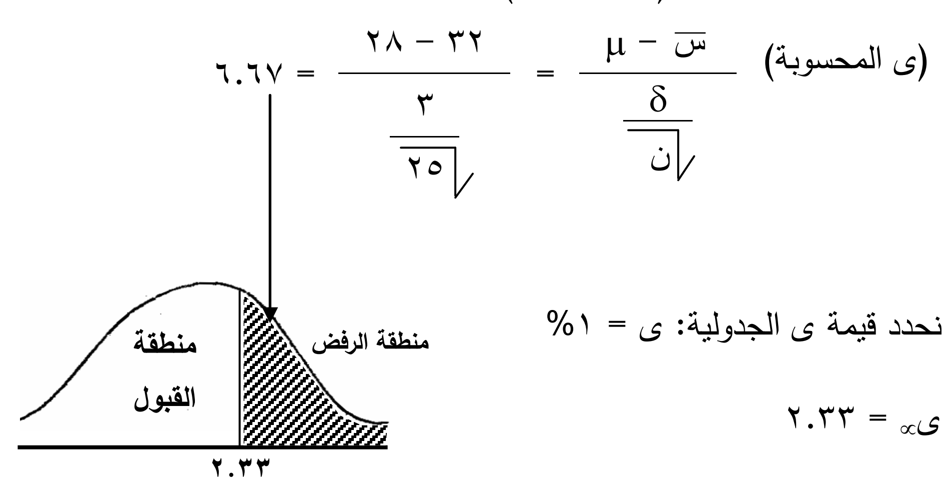
$\mu = ٢٨$ $\quad \delta = ٣$ $\quad ن = ٢٥$ $\quad \bar{س} = ٣٢$ $\quad \alpha = ١\%$

انحراف المجتمع معلوم نستخدم دالة التوزيع الطبيعى (ى)

الفرض العدمى (ض.): $\mu = ٢٨$

الفرض البديل (ض١): $\mu > ٢٨$ اختبار طرف أيمن

نحسب القيمة المعيارية (ى المحسوبة):



وحيث أن ى المحسوبة > ى الجدولية أى تقع فى منطقة الرفض

∴ نرفض الفرض العدمى ونقبل الفرض البديل القائل بأن نوع التقاوى الجديد أدى إلى زيادة إنتاجية الفدان.

مثال (٤): فى دراسة لمعرفة متوسط الإنتاج المعيب فى أحد المصانع تبين أن متوسط إنتاج العامل منها يبلغ ٥ وحدات معيبة يومياً، تم إدخال تعديلات على الآلات بهدف تقليل نسبة الوحدات المعيبة وتم اختيار ٢٠ عامل عشوائياً للعمل على الآلات المعدلة تبين أن متوسط إنتاج العامل من الوحدات المعيبة ٣ وحدات بانحراف معيارى وحدتين. اختبر الفرض القائل بأن التعديل الذى طرأ على الآلات كان السبب فى انخفاض متوسط إنتاج العامل من الوحدات المعيبة يومياً عند مستوى معنوية ٥% علماً بأن توزيع الوحدات المعيبة يتبع التوزيع الطبيعى.

الحل

μ = ٥   ن = ٢٠ $\bar{س}$ = ٣   ع = ٢ $\propto$ = ٥%

انحراف المجتمع غير معلوم، ∴ نستخدم انحراف العينة ع وحيث أن:

ن > ٣٠   ∴ نستخدم توزيع ت

الفرض العدمى (ض.): μ = ٥

الفرض البديل (ض١): μ < ٥   اختبار طرف أيسر

نحسب القيمة المعيارية (ت المحسوبة):

$$\text{(ت المحسوبة)} = \frac{\bar{\text{س}} - \mu}{\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}} = \frac{٣ - ٥}{\frac{٢}{\sqrt{٢٠}}} = -٤.٤٧$$

منطقة الرفض

منطقة القبول

-١.٧٣

نحدد القيمة الجدولية (ت الجدولية): $\text{ت}_{(١٩،\ ٠.٠٥)}$ = -١.٧٣

| ت | المحسوبة > | ت | الجدولية   أى تقع فى منطقة الرفض

∴ نرفض الفرض العدمى ونقبل الفرض البديل القائل بأن التعديل الذى طرأ على الآلات أدى إلى انخفاض متوسط إنتاج العامل من الوحدات المعيبة بدرجة ثقة ٩٥%.

٢- اختبار أن نسبة حدث ما فى المجتمع (ل) تساوى قيمة معينة One Sample Test for Proportion

بنفس الأسلوب السابق إذا تم سحب عينة وحساب نسبة حدث معين فيها ($\hat{\text{ل}}$) ومقارنة تلك النسبة بمثيلتها فى المجتمع (ل) سنجد أن هناك اختلاف، والاختبار هنا للتحقق من هذا الفرق أو الاختلاف هل هو عشوائى أى يرجع للصدفة نتيجة استخدامنا لأسلوب العينة، أم أنه فرق جوهرى وحتمى يرجع إلى المؤثر الذى نبحث من خلال الاختبار فى مدى تأثيره على مفردات المجتمع وذلك من خلال خطوات الاختبار الإحصائى، حيث:

الفرض العدمى (ض.): ل = قيمة معينة

الفرض البديل (ض$_1$): ل ≠ قيمة معينة   أو ل > قيمة معينة

أو ل < قيمة معينة

ثم نحسب قيمة المختبر الإحصائى (ى المحسوبة):

$$\text{ى المحسوبة} = \frac{\hat{\text{ل}} - \text{ل}}{\sqrt{\frac{\text{ل}\,(1-\text{ل})}{\text{ن}}}}$$

ثم نقارن بين (ى) المحسوبة، (ى) الجدولية ونستكمل خطوات الاختبار كما يتبين من المثال التالى:

مثال (١): إذا كانت نسبة المواليد الذكور فى إحدى المحافظات ٦٠% سحبت عينة من ٢٠٠ مولود عشوائياً وجد من بينها ١٤٠ مولود من الذكور، هل تعتقد أن هذه العينة ممثلة للمجتمع الذى سحبت منه عند درجة ثقة ٩٩%.

الحل

$\text{ل} = 0.60$ $\hat{\text{ل}} = \frac{140}{200} = 0.70$ $\text{ن} = 200$ $\propto = 1\%$

الفرض العدمى (ض$_0$): $\text{ل} = 0.60$

الفرض البديل (ض$_1$): $\text{ل} \neq 0.60$ اختبار طرفين

نحسب قيمة المختبر الإحصائى:

$$\text{ى المحسوبة} = \frac{\hat{\text{ل}} - \text{ل}}{\sqrt{\frac{\text{ل}\,(1-\text{ل})}{\text{ن}}}} = \frac{0.7 - 0.6}{\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{200}}} = 2.89$$

نحدد قيمة (ى) الجدولية: $\text{ى}_{\frac{\propto}{2}} = \pm 2.58$

منطقة الرفض   منطقة القبول   منطقة الرفض

-2.58 2.58

وحيث أن |ى| المحسوبة > |ى| الجدولية أى تقع فى منطقة الرفض

∴ نرفض الفرض العدمى ونقبل الفرض البديل أى أن هذه العينة لا تمثل المجتمع عند درجة ثقة ٩٩%.

ثانياً: الاختبارات التى تعتمد على عينتين مستقلتين

Two Independent Sample Tests

فى هذه الحالة يتم سحب عينتين مستقلتين حجمها $ن_1$، $ن_2$ ومن خلالهما نحسب المتوسطين $\overline{س}_1$، $\overline{س}_2$، أو $\hat{ل}_1$، $\hat{ل}_2$ وبالطبع سنجد بينهما اختلاف قد يرجع إلى الصدفة أو العشوائية وقد يرجع إلى عوامل سببية، والاختبار الإحصائى هو المنوط بتفسير هذه الاختلافات سواء باختبار معنوية الفرق بين المتوسطين، أو باختبار معنوية الفرق بين النسبتين.

١- اختبار الفرق بين متوسطى مجتمعين:

Two Sample Test for Means

لما كان الاختبار يعتمد على معرفة تأثير عامل معين (مؤثر معين) فإنه من الضرورى أن يتم اختيار عينتين إحداهما من المجتمع الذى لم تخضع مفرداته لاختبار تأثير هذا العامل يكون حجمها $ن_1$، ونحسب من خلالها $\overline{س}_1$، $ع_1^2$، ثم نختار عينة أخرى من المجتمع الذى خضعت مفرداته لاختبار تأثير هذا العامل حجمها $ن_2$ ونحسب من خلالها $\overline{س}_2$، $ع_2^2$، وقد يكون معلوماً لدينا تباين المجتمعين δ_1^2، δ_2^2 ومن الطبيعى أنه إذا كنا نبحث فى تأثير هذا العامل فإن الفرض العدمى يقوم على أساس أن هذا العامل لا تأثير له بمعنى أنه لا يوجد فرق بين متوسطى المجتمعين أى أن:

الفرض العدمى (ض.): $\mu_1 = \mu_2$ أو أن $\mu_1 - \mu_2 =$ صفر

أما الفرض البديل فيأخذ نفس الاتجاهات الثلاثة السابق الإشارة إليها أى أن:

الفرض البديل (ض$_1$):

$\mu_1 \neq \mu_2$ أو $\mu_1 < \mu_2$ أو $\mu_1 > \mu_2$

١/١ تباين المجتمعين معلوم:

فـى هـذه الحالـة نسـتخدم دالـة التوزيـع الطبيعـى المعيـارى ونحسـب قيمـة المختبر الإحصائى:

$$ى \text{ المحسوبة} = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\frac{\delta_1^2}{ن_1} + \frac{\delta_2^2}{ن_2}}}$$

واستخدام هذه العلاقة مرتبط بنفس شروط استخدامها فى عينة واحدة.

٢/١ تباين المجتمعين غير معلوم:

كما سبق وأشرنا نستخدم تباين العينتين

$$ى \text{ المحسوبة} = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}}$$

وهى تخضع أيضاً لنفس شروط استخدامها فى عينة واحدة.

وبالمثـل إذا كـان حجـم العينتـين صـغيراً ن$_1$، ن$_2$ < ٣٠ نسـتخدم القيمـة المعيارية (ت):

$$ت \text{ المحسوبة} = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}}$$

ويمكن استخدام δ_1^2، δ_2^2 إذا كان توزيع الظاهرة يتبع توزيعاً غير التوزيع الطبيعى، ن$_1$، ن$_2$ < ٣٠ أيضاً.

ثم نستكمل خطوات الاختبار الإحصائى كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثـال (١): لمعرفة متوسط إنتاج العامل فى أحد المصانع فى كل من الوردية الصباحية والوردية المسائية تم اختيار ١٠٠ عامل من كل وردية فكانت النتائج كما يلى:

- الوردية الصباحية: متوسط إنتاج العامل ٧٠ قطعة بانحراف معيارى ٥ قطع.
- الوردية المسائية: متوسط إنتاج العامل ٦٥ قطعة بانحراف معيارى ٤ قطع.

هل تعتقد أن هناك اختلاف حقيقى فى مستوى العمال فى الوردتين عند مستوى معنوية ١%.

الحـل

العينة الأولى (الوردية الصباحية):

$ن_١ = ١٠٠$ $\overline{س}_١ = ٧٠$ $ع_١ = ٥٠$

العينة الثانية (الوردية المسائية):

$ن_٢ = ١٠٠$ $\overline{س}_٢ = ٦٥$ $ع_٢ = ٤$

تباين المجتمعين غير معلوم، ∴ نستخدم تباين العينتين وحيث أن $ن_١، ن_٢ \geq ٣٠$ نستخدم التوزيع الطبيعى.

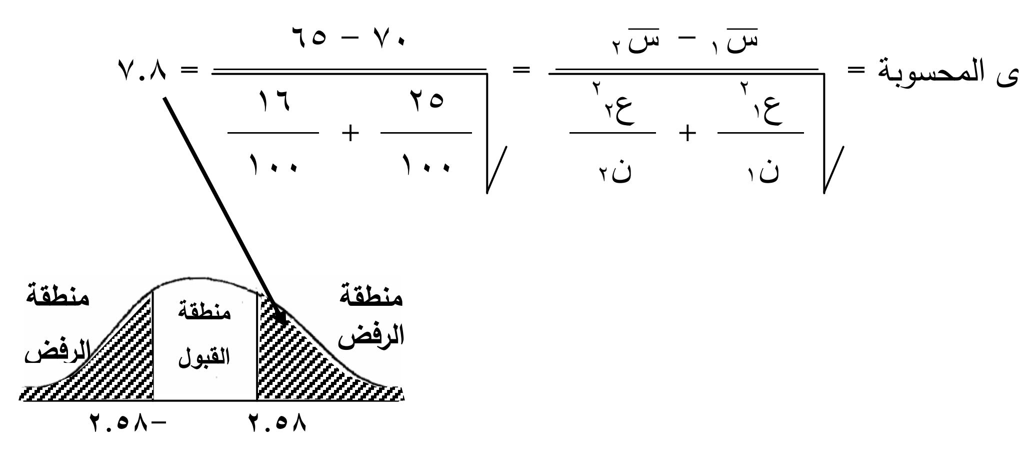
الفرض العدمى: $\mu_١ = \mu_٢$

الفرض البديل: $\mu_١ \neq \mu_٢$ اختبار طرفين

$\propto = ٠.٠١$ $ى_{\frac{\propto}{٢}} = \pm ٢.٥٨$

نحسب المختبر الإحصائى (ى المحسوبة):

$$ى \text{ المحسوبة} = \frac{\overline{س}_١ - \overline{س}_٢}{\sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}} = \frac{٧٠ - ٦٥}{\sqrt{\frac{٢٥}{١٠٠} + \frac{١٦}{١٠٠}}} = ٧.٨$$



نحدد قيمة (ى) الجدولية: $\alpha = ٠.٠١$ $\qquad$ $ى_{\frac{\alpha}{٢}} = \pm ٢.٥٨$

وحيث أن $|ى|$ المحسوبة > $|ى|$ الجدولية، أى تقع فى منطقة الرفض.

∴ نرفض الفرض العدمى القائل بتساوى مستوى العمال فى الوردتين ونقبل الفرض البديل أى القائل بعدم تساوى مستوى العمال فى الوردتين.

أى أن هناك اختلاف حقيقى فى مستوى العمال فى الوردتين بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٢): لمعرفة الفرق بين متوسط وزن الديك ووزن الفرخة فى إحدى مزارع الدواجن تم سحب عينة عشوائية من ١٠٠ ديك فوجد أن متوسط وزن الديك ١.٥كجم بانحراف معيارى ٥٠٠ جرام، وسحبت عينة عشوائية من ١٠٠ فرخة تبين أن متوسط وزن الفرخة ١.٣كجم بانحراف معيارى ٢٥٠جرام. اختبر الفرض القائل بأن الديوك أكثر وزناً من الفراخ عند مستوى معنوية ٥%.

الحـل

الديوك: $ن_١ = ١٠٠$ $\qquad$ $\overline{س}_١ = ١.٥$ $\qquad$ $ع_١ = ٠.٥$

الفراخ: $ن_٢ = ١٠٠$ $\qquad$ $\overline{س}_٢ = ١.٣$ $\qquad$ $ع_٢ = ٠.٢٥$

الفرض العدمى: $\mu_١ = \mu_٢$

الفرض البديل: $\mu_١ > \mu_٢$ $\qquad$ اختبار طرف أيمن

$\alpha = ٠.٠٥$ $\qquad$ $ى_{٠.٠٥} = ١.٦٥$

نحسب المختبر الإحصائى (ى المحسوبة):

$$ى \text{ المحسوبة} = \frac{\overline{س}_١ - \overline{س}_٢}{\sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}} = \frac{١.٥ - ١.٣}{\sqrt{\frac{(٠.٥)^٢}{١٠٠} + \frac{(٠.٢٥)^٢}{١٠٠}}} = ٣.٥٨$$

منطقة القبول

منطقة الرفض

١.٦٥

نحدد قيمة (ى) الجدولية: $ى_{٠.٠٥}$ = ١.٦٥

وحيث أن ى المحسوبة > ى الجدولية، أى تقع فى منطقة الرفض

∴ نرفض الفرض العدمى القائل بتساوى متوسط الوزن ونقبل الفرض البديل القائل بأن متوسط وزن الديوك أكبر من متوسط وزن الفراخ (الديوك أكثر وزناً من الفراخ) بدرجة ثقة ٩٥%.

مثال (٣): لمعرفة الفرق بين متوسط درجات الطلبة والطالبات بالفرقة الثالثة بالكلية تم سحب عينة عشوائية من الطلبة حجمها ٢٢٠ طالب وجد أن متوسط درجاتهم فى مادة الإحصاء ١٤ درجة وتم سحب عينة عشوائية من الطالبات حجمها ١٨٠ طالبة وجد أن متوسط درجاتهم فى مادة الإحصاء ١٥ درجة هل تؤيد الفرض القائل بأن مستوى الطلبة أقل من مستوى الطالبات فى مادة الإحصاء عند مستوى معنوية ١% علماً بأن الانحراف المعيارى لدرجات مادة الإحصاء ٥ درجات.

الحل

الطلبة: $ن_{١}$ = ٢٢٠ $\overline{س}_{١}$ = ١٤ $ع_{١}$ = ٥

الطالبات: $ن_{٢}$ = ١٨٠ $\overline{س}_{٢}$ = ١٥ $ع_{٢}$ = ٥

الفرض العدمى: $\mu_{١} = \mu_{٢}$

الفرض البديل: $\mu_{١} < \mu_{٢}$

مستوى الطلبة أقل من مستوى الطالبات اختبار طرف أيسر

نحسب المختبر الإحصائى (ى المحسوبة):

$$ى\ المحسوبة = \frac{\overline{س}_{١} - \overline{س}_{٢}}{\sqrt{\frac{ع_{١}^{٢}}{ن_{١}} + \frac{ع_{٢}^{٢}}{ن_{٢}}}} = \frac{١٤ - ١٥}{\sqrt{\frac{٢٥}{٢٢٠} + \frac{٢٥}{١٨٠}}} = -١.٢٤$$

منطقة القبول

منطقة الرفض

-٢.٣٣

نحدد قيمة (ى) الجدولية: $\propto = 0.01$ $ى_{0.01} = -2.33$

وحيث أن |ى| المحسوبة > |ى| الجدولية، أى تقع فى منطقة القبول

∴ نقبل الفرض العدمى القائل بتساوى مستوى الطلبة والطالبات فى مادة الإحصاء ونرفض الفرض البديل القائل بأن مستوى الطلبة أقل من مستوى الطالبات فى مادة الإحصاء بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٤): لمعرفة الفرق بين متوسط وزن الأطفال الذين يعتمدون على الرضاعة الطبيعية، ومتوسط وزن الأطفال الذين يعتمدون على الرضاعة الصناعية، تم اختيار ٢٠ طفل من المجموعة الأولى بطريقة عشوائية فوجد أن متوسط وزن الطفل ٦كجم بانحراف معيارى ١كجم وتم اختيار ٢٥ طفل من المجموعة الثانية عشوائياً فوجد أن متوسط وزن الطفل ٧.٢كجم بانحراف معيارى ١.٣كجم هل تعتقد فى تأثير الرضاعة على وزن الطفل عند مستوى معنوية ٥% علماً بأن وزن الأطفال يتبع التوزيع الطبيعى.

الحل

المجموعة الأولى: $ن_1 = 20$، $\overline{س}_1 = 6$ ، $ع_1 = 1$

المجموعة الثانية: $ن_2 = 25$، $\overline{س}_2 = 7.2$ ، $ع_2 = 1.3$

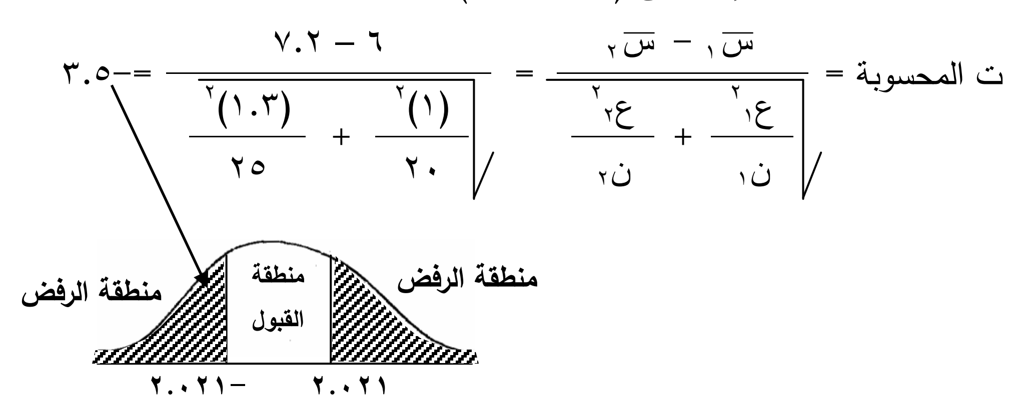
تباين المجتمعين غير معلوم، ∴ نستخدم تباين العينتين وحيث أن : $ن_1$، $ن_2 < 30$ نستخدم توزيع (ت).

الفرض العدمى (ض.): $\mu_1 = \mu_2$ لا فرق فى متوسط الوزن

الفرض البديل (ض١): $\mu_1 \neq \mu_2$ هناك فرق فى متوسط الوزن (اختبار طرفين)

نحسب قيمة المختبر الإحصائى (ت المحسوبة):

$$\text{ت المحسوبة} = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}} = \frac{٦ - ٧.٢}{\sqrt{\frac{(١)^2}{٢٠} + \frac{(١.٣)^2}{٢٥}}} = -٣.٥$$



نحدد قيمة (ت) الجدولية: $ت_{(ن_1 + ن_2 - ٢، \frac{\alpha}{٢})} = ت_{٤٣، ٠.٠٢٥} = \pm ٢.٠٢١$

| ت | المحسوبة > | ت | الجدولية أى تقع فى منطقة الرفض.

∴ نرفض الفرض العدمى القائل بتساوى متوسط الوزن بين المجتمعين ونقبل الفرض البديل القائل بعدم تساوى متوسط الوزن بين المجتمعين أى نقبل بالفرض القائل بتأثير الرضاعة الصناعية على وزن الطفل بدرجة ثقة ٩٥%.

٢- اختبار الفرق بين نسبتى حدث فى مجتمعين:

Two Samples Tests for Proportions

لا يختلف هذا الاختبار عن الاختبار السابق (الفرق بين متوسطى مجتمعين) إلا فى شكل المختبر الإحصائى، حيث يتم سحب عينتين حجمهما $ن_1$، $ن_2$ وحساب نسبة الحدث فيهما أى $\hat{ل}_1$، $\hat{ل}_2$ ويقوم هذا الاختبار على فرض أنه لا فرق بين نسبتى الحدث فى المجتمعين:

أى أن الفرض العدمى (ض.): $ل_1 = ل_2$ أو أن $ل_1 - ل_2 = $ صفر

الفرض البديل ($ض_1$) فيأخذ إحدى الصور التالية:

$ل_1 \neq ل_2$ أو $ل_1 > ل_2$ أو $ل_1 < ل_2$

ونحسب قيمة المختبر الإحصائى للتوزيع الطبيعى (ى المحسوبة) من خلال العلاقة:

$$\text{ى المحسوبة} = \frac{\hat{ل}_{١} - \hat{ل}_{٢}}{\sqrt{\frac{ل_{١}\,(١- ل_{١})}{ن_{١}} + \frac{ل_{٢}\,(١- ل_{٢})}{ن_{٢}}}}$$

وإذا لم تكن النسبة فى المجتمعين معلومة (ل١، ل٢) فإننا نستخدم نسبة الحدث فى كل عينة بدلاً منها، ومن ثم تصبح قيمة المختبر الإحصائى كما يلى:

$$\text{ى المحسوبة} = \frac{\hat{ل}_{١} - \hat{ل}_{٢}}{\sqrt{\frac{\hat{ل}_{١}\,(١-\hat{ل}_{١})}{ن_{١}} + \frac{\hat{ل}_{٢}\,(١-\hat{ل}_{٢})}{ن_{٢}}}}$$

ثم نستمر فى خطوات الاختبار الإحصائى كما يتبين من خلال الأمثلة التالية:

مثال (١): لمعرفة الفرق بين نسبة الأمية فى الريف والحضر تم سحب عينة من الريف حجمها ٢٠٠ شخص وجد منهم ٥٠ أمياً، وتم سحب عينة من الحضر حجمها ٣٠٠ شخص وجد منهم ٤٢ أمياً، فإذا علمت أن نسبة الأمية فى الريف ٤٠%، وفى الحضر ٣٠%، فهل تعكس نسبة الأمية فى العينتين ارتفاع نسبة الأمية فى الريف عن الحضر عند مستوى معنوية ١%.

الحل

الريف: $ل_{١} = ٠.٤٠$ $\qquad \hat{ل}_{١} = \frac{٥٠}{٢٠٠} = ٠.٢٥$ $\qquad ن_{١} = ٢٠٠$

الحضر: $ل_{٢} = ٠.٣٠$ $\qquad \hat{ل}_{٢} = \frac{٤٢}{٣٠٠} = ٠.١٤$ $\qquad ن_{٢} = ٣٠٠$

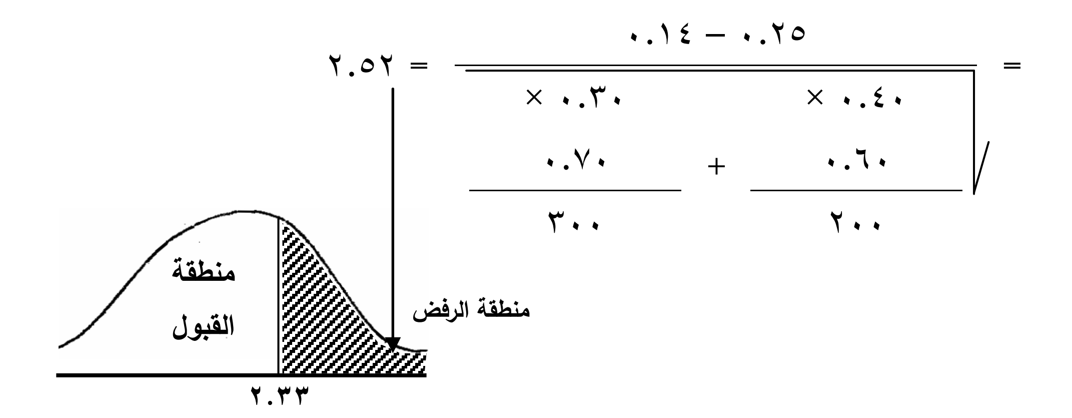
الفرض العدمى: (ض.): $ل_{١} = ل_{٢}$

الفرض البديل: (ض$_{١}$): ل$_{١}$ > ل$_{٢}$ اختبار طرف أيمن

نحسب قيمة المختبر الإحصائى:

$$\text{ى المحسوبة} = \frac{\hat{\text{ل}}_{١} - \hat{\text{ل}}_{٢}}{\sqrt{\frac{\text{ل}_{١}\,(١-\text{ل}_{١})}{\text{ن}_{١}} + \frac{\text{ل}_{٢}\,(١-\text{ل}_{٢})}{\text{ن}_{٢}}}}$$

$$= \frac{٠.٢٥ - ٠.١٤}{\sqrt{\frac{٠.٤٠ \times ٠.٦٠}{٢٠٠} + \frac{٠.٣٠ \times ٠.٧٠}{٣٠٠}}} = ٢.٥٢$$



نحدد قيمة (ى) الجدولية: اختبار طرف أيمن $\propto$ = ٠.٠١

ى$_{٠.٠١}$ = ٢.٣٣

وحيث أن ى المحسوبة > ى الجدولية أى تقع فى منطقة الرفض

∴ نرفض الفرض العدمى القائل بتساوى نسبة الأمية بين الريف والحضر ونقبل الفرض البديل القائل بأن نسبة الأمية فى الريف أعلى من الحضر، ومعنى ذلك أن العينتين تعكسان ارتفاع نسبة الأمية فى الريف عن الحضر بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٢): فى دراسة أعدها المركز القومى الأمريكى لقياس الرأى أخذت عينة من مدينة واشنطن حجمها ٥٠٠ ناخب فوجد أن نسبة المؤيدين لمرشح الحزب الجمهورى ٥٣%، وسحبت عينة من مدينة نيويورك حجمها ٣٠٠ ناخب وجد أن

نسبة المؤيدين لنفس المرشح ٥١%، اختبر الفرض القائل بأن هناك اختلافاً حقيقياً بين نسبة مؤيدى الحزب الجمهورى فى المدينتين بدرجة ثقة ٩٩%.

الحـل

واشنطن: $ن_١ = ٥٠٠$ $\hat{ل}_١ = ٠.٥٣$

نيويورك: $ن_٢ = ٣٠٠$ $\hat{ل}_٢ = ٠.٥١$

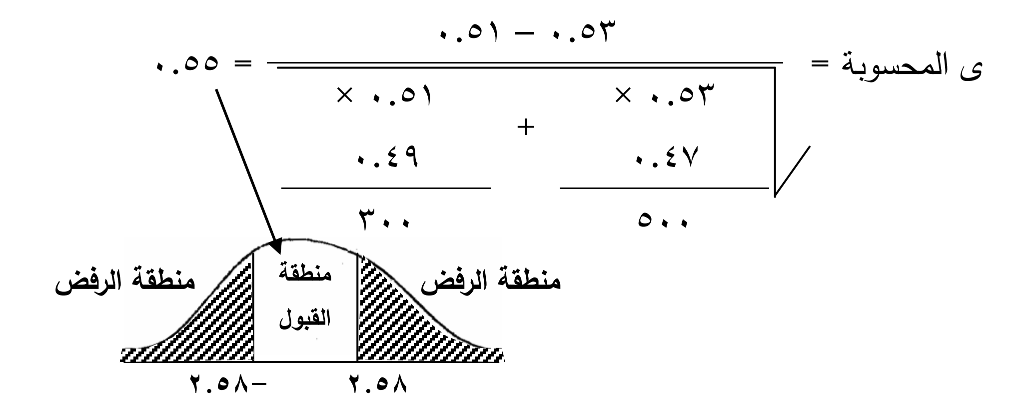
الفرض العدمى: (ض.): $ل_١ = ل_٢$

الفرض البديل: (ض١): $ل_١ \neq ل_٢$ اختبار طرفين

نحسب قيمة المختبر الإحصائى:

$$ى \text{ المحسوبة} = \frac{\hat{ل}_١ - \hat{ل}_٢}{\sqrt{\frac{\hat{ل}_١(١-\hat{ل}_١)}{ن_١} + \frac{\hat{ل}_٢(١-\hat{ل}_٢)}{ن_٢}}}$$

$$ى \text{ المحسوبة} = \frac{٠.٥٣ - ٠.٥١}{\sqrt{\frac{٠.٥٣ \times ٠.٤٧}{٥٠٠} + \frac{٠.٥١ \times ٠.٤٩}{٣٠٠}}} = ٠.٥٥$$



نحدد قيمة (ى) الجدولية: اختبار طرفين $\propto = ٠.٠١$

$ى_{٠.٠١} = \pm ٢.٥٨$

وحيث أن |ى| المحسوبة < |ى| الجدولية أى تقع فى منطقة القبول

∴ نقبل الفرض العدمى القائل بتساوى نسبة المؤيدين لمرشح الحزب الجمهورى فى المدينتين ونرفض الفرض البديل القائل بعدم تساوى تلك النسبة بدرجة ثقة ٩٩%.

مثال (٣): فى دراسة لمعرفة نسبة المدخنين بين طلبة وطالبات إحدى الجامعات تم اختيار عينة من الطلبة حجمها ٣٥٠ طالب فوجد أن نسبة المدخنين فيها ٤٥% وسحبت عينة من الطالبات حجمها ٢٥٠ طالبة فوجد أن نسبة المدخنات فيها ٤٠%، هل تؤيد الرأى القائل بأن نسبة المدخنات من طالبات الجامعة أقل من نسبة المدخنين من الطلبة بدرجة ثقة ٩٥%.

الحـل

الطلبة: $\text{ن}_{1} = ٣٥٠$ $\quad\quad$ $\hat{\text{ل}}_{1} = ٠.٤٥$

الطالبات: $\text{ن}_{2} = ٢٥٠$ $\quad\quad$ $\hat{\text{ل}}_{2} = ٠.٤٠$

الفرض العدمى (ض.): $\text{ل}_{1} = \text{ل}_{2}$

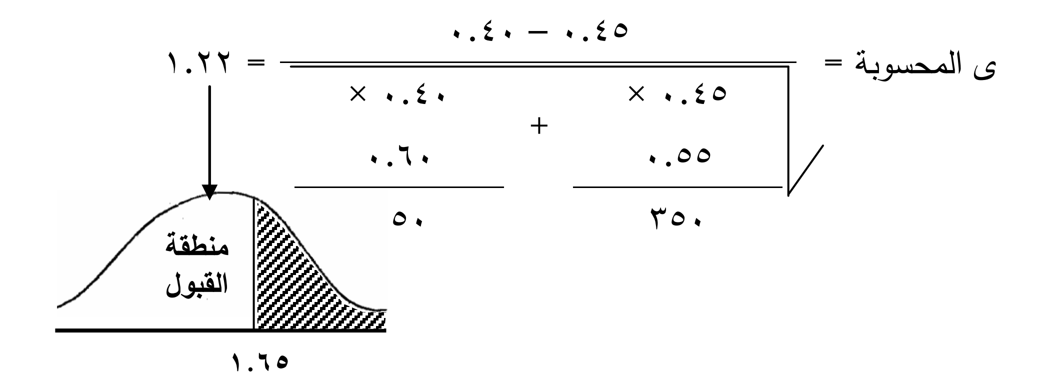
الفرض البديل (ض١): $\text{ل}_{1} > \text{ل}_{2}$ $\quad$ اختبار طرف أيمن

(يمكن اعتباره طرف أيسر على أساس أن $\text{ل}_{2} < \text{ل}_{1}$)

نحسب قيمة المختبر الإحصائى (ى المحسوبة):

$$\text{ى المحسوبة} = \frac{\hat{\text{ل}}_{1} - \hat{\text{ل}}_{2}}{\sqrt{\dfrac{\hat{\text{ل}}_{1}(1-\hat{\text{ل}}_{1})}{\text{ن}_{1}} + \dfrac{\hat{\text{ل}}_{2}(1-\hat{\text{ل}}_{2})}{\text{ن}_{2}}}}$$

$$\text{ى المحسوبة} = \frac{٠.٤٥ - ٠.٤٠}{\sqrt{\dfrac{٠.٤٥ \times ٠.٥٥}{٣٥٠} + \dfrac{٠.٤٠ \times ٠.٦٠}{٥٠}}} = ١.٢٢$$

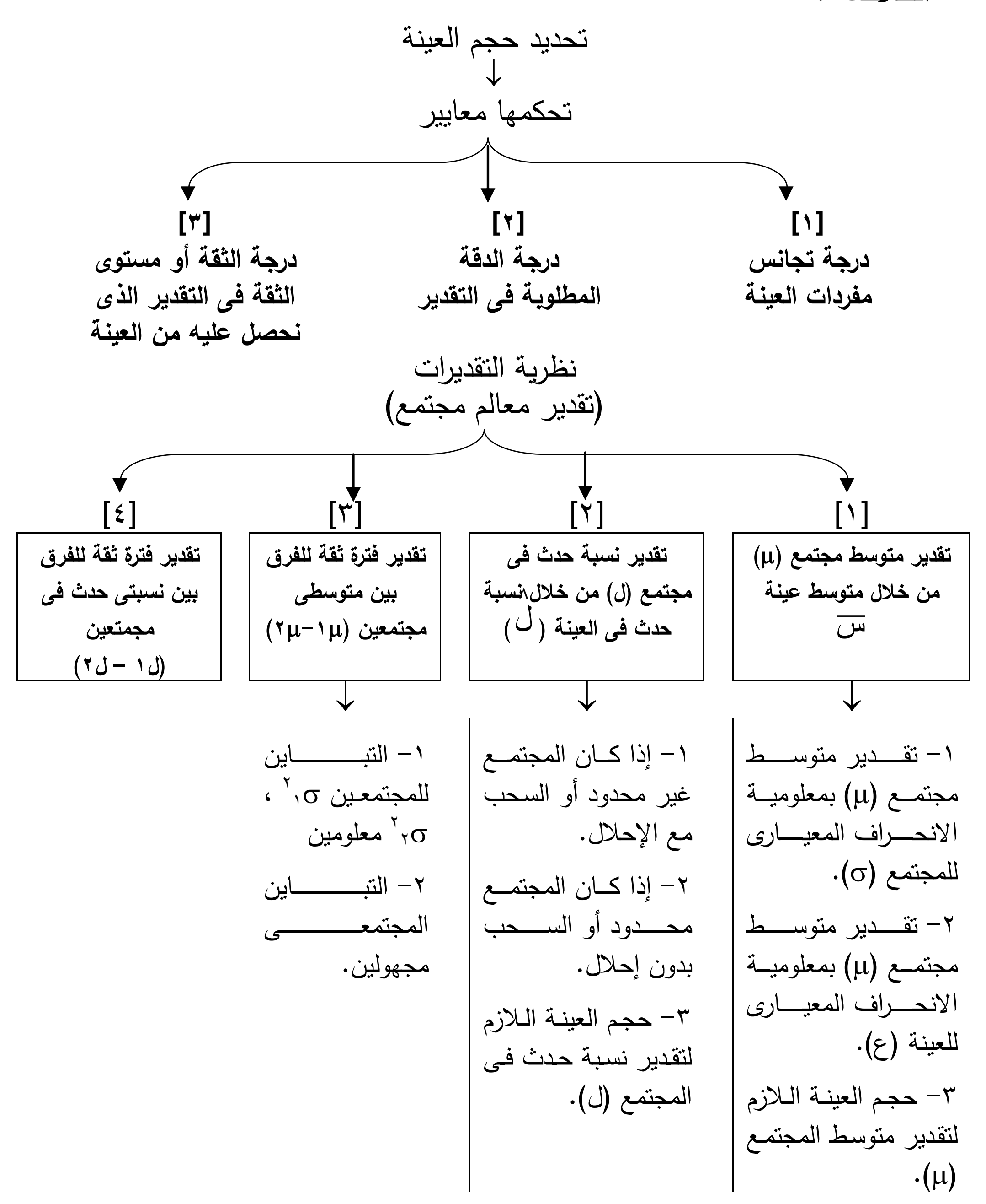


نحدد قيمة (ى) الجدولية: ∝ = ٠.٠٥   ى$_{\propto}$ = ١.٦٥

وحيث أن |ى| المحسوبة < |ى| الجدولية أى تقع فى منطقة القبول

∴ نقبل الفرض العدمى القائل بتساوى نسبة المدخنين من الطلبة والطالبات فى الجامعة ونرفض الفرض البديل القائل بأن نسبة المدخنات من الطالبات أقل من نسبة المدخنين من الطلبة بدرجة ثقة ٩٥%.

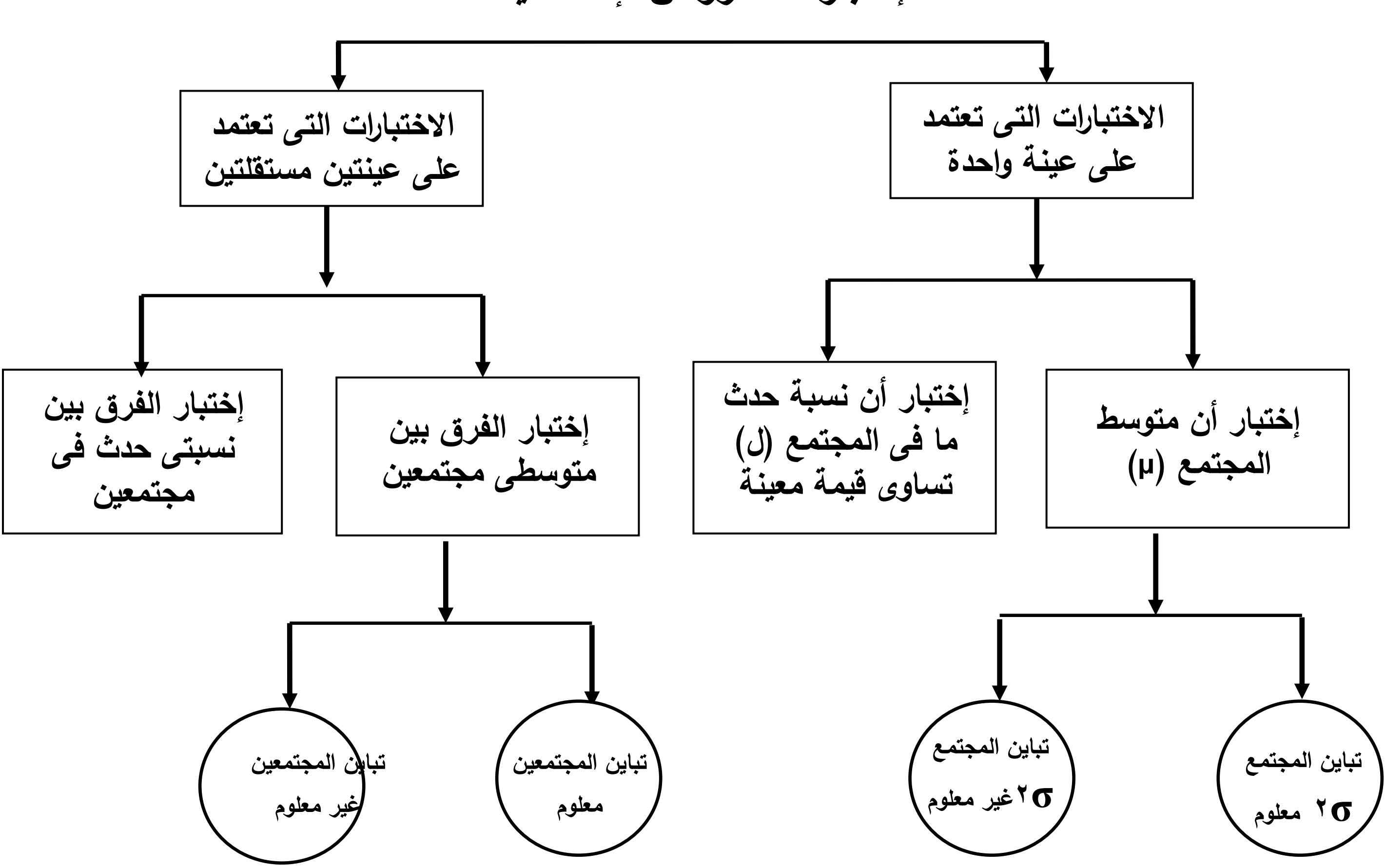
الخلاصة :



تحديد حجم العينة
تحكمها معايير
[١]
درجة تجانس مفردات العينة
[٢]
درجة الدقة المطلوبة فى التقدير
[٣]
درجة الثقة أو مستوى الثقة فى التقدير الذى نحصل عليه من العينة
نظرية التقديرات
(تقدير معالم مجتمع)
[١]
تقدير متوسط مجتمع (μ) من خلال متوسط عينة س̄
[٢]
تقدير نسبة حدث فى مجتمع (ل) من خلال نسبة حدث فى العينة (ل̂)
[٣]
تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطى مجتمعين (μ١-μ٢)
[٤]
تقدير فترة ثقة للفرق بين نسبتى حدث فى مجتمعين (ل١ – ل٢)
١- تقدير متوسط مجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للمجتمع (σ).
٢- تقدير متوسط مجتمع (μ) بمعلومية الانحراف المعيارى للعينة (ع).
٣- حجم العينة اللازم لتقدير متوسط المجتمع (μ).
١- إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب مع الإحلال.
٢- إذا كان المجتمع محدود أو السحب بدون إحلال.
٣- حجم العينة اللازم لتقدير نسبة حدث فى المجتمع (ل).
١- التباين للمجتمعين σ١^٢ ، σ٢^٢ معلومين
٢- التباين المجتمعى مجهولين.

الخلاصة

إختبارات الفروض الإحصائية



تمارين على التقديرات واختبارات الفروض الإحصائية

١- إذا كان طول الطالب فى جامعة القاهرة يتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط ١٦٥سم وانحراف معيارى ١٥سم، سحبت عينة عشوائية من ١٠٠ طالب فما هو احتمال أن يبلغ متوسط الطول فى العينة ١٧٠سم على الأكثر.

٢- إذا كان متوسط إنتاج الفدان من القمح فى إحدى المحافظات ١٥ أردب بانحراف معيارى ٥ أردب، فإذا كان إنتاج القمح يتبع توزيعاً طبيعياً، اختيرت عينة عشوائية من ٢٠ فدان، فما هو احتمال أن يتراوح متوسط إنتاج الفدان بين ١٣، ١٨ أردب.

٣- إذا كانت المساحة المزروعة بالقطن فى إحدى المحافظات ١٠٠ ألف فدان، وكان متوسط إنتاج الفدان ١٥ قنطار بانحراف معيارى ٩ قنطار، تم اختيار عينة عشوائية من ١٠٠ فدان احسب ما يلى:

أ- احتمال أن يبلغ متوسط إنتاج الفدان ١٢ قنطار على الأقل.

ب- احتمال أن يتراوح متوسط إنتاج الفدان بين ١٣، ١٥ قنطار.

جـ- المساحة من هذه العينة التى يتراوح متوسط إنتاج الفدان فيها بين ١٥، ١٨ قنطار.

د- متوسط إنتاج الفدان الذى يزيد عنه متوسط إنتاج ٧٥% من المساحة المنزرعة.

٤- إذا كانت المساحة المزروعة بقصب السكر فى إحدى محافظات الوجه القبلى ٥٠٠ ألف فدان، وكان متوسط إنتاج الفدان ١٠٠٠ قنطار بانحراف معيارى ٧٠٠ قنطار، تم اختيار عينة عشوائية من ٢٠٠ فدان، احسب ما يلى:

أ- احتمال أن يبلغ متوسط إنتاج الفدان ٩٠٠ قنطار على الأكثر.

ب- احتمال أن يتراوح متوسط إنتاج الفدان بين ١١٠٠، ١٢٠٠ قنطار.

جـ- المساحة من هذه العينة التى يتراوح متوسط إنتاج الفدان فيها بين ٨٠٠ قنطار، ١١٠٠ قنطار.

د- متوسط إنتاج الفدان الذى يقل عنه متوسط إنتاج ٣٠% من المساحة المزروعة.

٥- إذا كانت نسبة الإنتاج المطابق للمواصفات فى أحد المصانع ٨٥% فإذا تم سحب عينة عشوائية من ١٠٠ وحدة من إنتاج المصنع احسب ما يلى:

أ- احتمال أن تبلغ نسبة الوحدات المطابقة للمواصفات فى العينة ٧٥% على الأقل.

ب- احتمال أن تتراوح نسبة الوحدات المطابقة للمواصفات فى العينة بين ٧٠%، ٨٥%.

جـ- عدد الوحدات بالعينة التى يتراوح نسبة الوحدات المطابقة بين ٨٠%، ٩٠%.

٦- أخذت عينة عشوائية حجمها ١٠٠ عامل من أحد المصانع فوجد أن متوسط العمر ٣٥ سنة بانحراف معيارى ١٥ سنة، فإذا علمت أن العمر يتبع توزيعاً طبيعياً ماذا تستنتج عن متوسط عمر العامل فى المصنع بدرجة ثقة ٩٥%.

٧- أخذت عينة عشوائية حجمها ٢٥ عامل من أحد المصانع فوجد أن متوسط الدخل الشهرى للعامل ٣٠٠ جنيه بانحراف معيارى ١٠٠ جنيه، فإذا علمت أن توزيع الدخل يقترب جداً من التوزيع الطبيعى.

المطلوب: تقدير فترة ثقة لمتوسط الدخل الشهرى للعامل فى هذا المصنع عند مستوى معنوية ١%.

٨- فى التمرين السابق بفرض أن عدد عمال المصنع ٣٥٠ عامل أوجد نفس المطلوب بدرجة ثقة ٩٥%.

٩- أخذت عينة عشوائية حجمها ٢٠ طالب من إحدى قاعات الامتحان فوجد أن متوسط طول الطالب ١٦٨سم، فإذا علمت أن الانحراف المعيارى للطول فى الكلية ١٥سم، وأن توزيع الطول يقترب جداً من التوزيع الطبيعى. المطلوب تقدير متوسط طول الطالب فى الكلية عند مستوى معنوية ٥%.

١٠- فى التمرين السابق إذا علمت أن عدد الطلاب بقاعة الامتحان ٣٠٠ طالب، المطلوب تقدير متوسط طول الطالب بدرجة ثقة ٩٩%.

١١- فى دراسة لمعرفة متوسط إنتاج الفدان من الذرة فى إحدى المحافظات أخذت عينة عشوائية من ١٠٠ فدان، فوجد أن متوسط إنتاج الفدان ٢٥ أردب، فإذا علمت أن الانحراف المعيارى لإنتاج الفدان من الذرة ٧ أردب، ماذا تستنتج عن متوسط إنتاج الفدان من الذرة فى هذه المحافظة علماً بأن المساحة المزروعة بالذرة فى هذه المحافظة تبلغ ٥٠ ألف فدان (عند مستوى معنوية ١%).

١٢- فى دراسة لمعرفة متوسط إنتاج العامل فى مصانع السيراميك بمدينة السادس من أكتوبر سحبت عينة من ٣٠٠ عامل وجد أن متوسط الإنتاج اليومى للعامل يبلغ ٥٠ وحدة بانحراف معيارى ٣٠ وحدة. المطلوب تقدير متوسط إنتاج العامل فى مصانع السيراميك عند درجة ثقة ٩٩% علماً بأن عدد العمال فى تلك المصانع فى نفس مجال التخصص ٣ آلاف عامل.

١٣- أوجد حجم العينة اللازم لتقدير متوسط إنتاج الفدان من الذرة فى إحدى المحافظات إذا كنا نرغب ألا يختلف هذا المتوسط عن المتوسط الحقيقى فى المجتمع بأكثر من ٣ أردب وبدرجة ثقة ٩٩%، إذا علمت أن إنتاج الفدان من الذرة يتبع توزيعاً طبيعياً تباينه ٢٢٥ أردب.

١٤- إذا كان إجمالى المساحة المزروعة قطن فى إحدى المحافظات ٥٠ألف فدان ما هو حجم العينة اللازم سحبه لتقدير متوسط إنتاج الفدان من القطن بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى التقدير عن ٢ قنطار للفدان وذلك بدرجة ثقة ٩٥% إذا علمت أن الانحراف المعيارى لإنتاج الفدان من القطن فى عينة استطلاعية يبلغ ٧ قنطار.

١٥- فى دراسة لمعرفة نسبة الطلبة فى الكلية الذين لديهم جهاز كمبيوتر تم سحب عينة بين ٣٠٠ طالب وجد منهم ١٢٠ طالب لديهم جهاز كمبيوتر، قدر بدرجة ثقة ٩٩% نسبة الطلبة الذين لديهم جهاز كمبيوتر فى الكلية.

١٦- سحبت عينة عشوائية من طلبة الكلية من الفرقة الأولى حجمها ٥٠٠ طالب وجد أن نسبة طلاب الانتساب الموجه بها ٢٠% ماذا تستنتج عن نسبة هؤلاء الطلاب فى الكلية بدرجة ثقة ٩٥% علماً بأن عدد طلاب الفرقة الأولى ١٠٠٠٠طالب.

١٧- سحبت عينة عشوائية من طلبة الكلية مكونة من ٤٠٠ طالب فوجد أن نسبة الطلاب القادمين من مدارس حكومية تبلغ ٧٠% ماذا تستنتج عن نسبة هؤلاء الطلاب فى الكلية بدرجة ثقة ٩٩% علماً بأن عدد طلاب الكلية ٢٨٠٠٠طالب.

١٨- ما هو حجم العينة اللازم سحبه من مجتمع عدد مفرداته ١٠٠٠ شخص لتقدير نسبة الأمية بينهم إذا كان هناك اعتقاد بأن نسبة الأمية فى المجتمع تتراوح بين ٤٥%، ٦٠% بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى تقدير هذه النسبة عن ٢% وبدرجة ثقة ٩٩%.

١٩- ما هو حجم العينة اللازم سحبه من الكلية لتقدير نسبة الطلاب القادمين من مدارس حكومية إذا كان هناك اعتقاد أن تلك النسبة فى الكلية تتراوح بين ٦٠%، ٨٠% بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى تقدير هذه النسبة عن ٢.٥% وبدرجة ثقة ٩٥%.

٢٠- أوجد المطلوب فى التمرين السابق بفرض أن عدد طلاب الكلية ٢٨٠٠٠ طالب.

٢١- ما هو حجم العينة اللازم سحبه من المجتمع لتقدير نسبة المتزوجين بشرط ألا يتجاوز الخطأ فى تقدير هذه النسبة عن ٣% وبدرجة ثقة ٩٩%.

٢٢- فى دراسة حول متوسط استهلاك الفرد من مياه الشرب على مستوى الجمهورية تم سحب عينة من مدينة القاهرة حجمها ٥٠٠ أسرة فوجد أن متوسط استهلاك الفرد ٥٠ لتر يومياً بانحراف معيارى ٢٠ لتر، كما تم سحب عينة من مدينة بنها حجمها ٣٠٠ أسرة فوجد أن متوسط استهلاك الفرد ٣٠ لتر يومياً بانحراف معيارى ١٠لتر. المطلوب تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسطى استهلاك الفرد من المياه يومياً بين المدينتين بدرجة ثقة ٩٩%.

٢٣- فى دراسة حول متوسط عمر الفرد من المترددين على ملاعب كرة القدم على مستوى الجمهورية تم سحب عينة من ٥٠٠ فرد من ستاد طنطا فوجد أن متوسط عمر الفرد ٢٧ سنة، وتم سحب عينة من ٥٠٠فرد من ستاد المحلة الكبرى فوجد أن متوسط عمر الفرد ٢٣ سنة فإذا علمت أن الانحراف المعيارى لعمر الفرد من المترددين على ملاعب كرة القدم ١٥ سنة، قدر بدرجة ثقة ٩٥% الفرق بين متوسطى عمر الفرد بين المدينتين.

٢٤- فى دراسة لمعرفة الفرق بين متوسط الدخل الشهرى للعامل فى مصنعين تم سحب عينة من ٢٥ عامل من كل مصنع فكان توزيعهم وفقاً لفئات الدخل الشهرى كما يلى:

فئات الدخل الشهرى	٢٠٠-	٢٢٠-	٢٤٠-	٢٦٠-	٢٨٠-٣٠٠	المجموع
عمال المصنع (أ)	٢	٥	٨	٧	٣	٢٥
عمال المصنع (ب)	١	٣	٧	١٠	٤	٢٥

قدر بدرجة ثقة ٩٩% الفرق بين متوسط الدخل الشهرى للعامل فى المصنعين.

٢٥- أوجد المطلوب فى التمرين السابق علماً بأن عدد العمال فى المصنع (أ) ٥٠٠ عامل وفى المصنع (ب) ٤٠٠ عامل.

٢٦- فى دراسة لمعرفة نسبة الإصابة بمرض البلهارسيا بين الفلاحين على مستوى الجمهورية سحبت عينة من ٥٠٠ فلاح فى محافظة المنوفية

وبإجراء التحاليل اللازمة تبين إصابة ٣٥٠ فلاح بالبلهارسيا وسحبت عينة من ٤٠٠ فلاح فى محافظة أسيوط وبإجراء التحاليل تبين إصابة ٢٦٠ فلاح بالبلهارسيا. المطلوب تقدير فترة ثقة للفرق بين نسبة الإصابة بمرض البلهارسيا فى المحافظتين بدرجة ثقة ٩٥%.

٢٧- فى دراسة لمعرفة نسبة الإصابة بالفشل الكلوى على مستوى الجمهورية بين الذكور والإناث سحبت عينة عشوائية من الذكور وأخرى من الإناث حجم كل منها ٥٠٠ من إحدى القرى فتبين أن عدد المصابين بالفشل الكلوى ١٢٠ من الذكور، ٨٠ من الإناث فإذا علمت أن عدد سكان القرية ١٠ آلاف نسمة، قدر بدرجة ثقة ٩٩% الفرق بين نسبة الإصابة بالفشل الكلوى بين الذكور والإناث فى هذه القرية.

٢٨- إذا كان متوسط استهلاك الأسرة من الكهرباء فى مدينة القاهرة يبلغ ١٠٠كيلووات بانحراف معيارى ٢٠كيلووات، ثم سحب عينة من ١٠٠ أسرة تبين أن متوسط استهلاك الأسرة ٢٠كيلووات، اختبر الفرض القائل بأن العينة لا تمثل المجتمع المسحوبة منه عند مستوى معنوية ١%.

٢٩- إذا كان متوسط استهلاك الفرد من مياه الشرب فى مدينة القاهرة يبلغ ٥٠لتر يومياً بانحراف معيارى ٢٠لتر وبعد تكثيف حملة إعلانية عن ترشيد استهلاك المياه، تم سحب عينة من ٢٠٠ فرد وجد أن متوسط استهلاك الفرد منهم من المياه ٤٠لتر يومياً، هل تؤيد الفرض القائل بأن نتائج العينة تؤكد على نجاح الحملة الإعلانية فى خفض استهلاك الفرد من المياه بدرجة ثقة ٩٥%.

٣٠- إذا كان متوسط إنتاج الفدان من قصب السكر ٩٠٠قنطار بانحراف معيارى ٣٠٠قنطار، تم تطبيق نظام جديد فى زراعة ٢٠فدان حيث تم تسوية الأرض بأشعة الليزر فوجد أن متوسط إنتاج الفدان ١٠٠٠قنطار، هل تؤيد الفرض القائل بأن النظام الحديث فى زراعة قصب السكر أدى إلى زيادة إنتاج الفدان عند مستوى معنوية ٥%.

٣١- إذا كان متوسط إنتاج الفدان من الأرض فى محافظة كفر الشيخ يبلغ ٣طن، تم استخدام نوع جديد من التقاوى فى زراعة ٢٥فدان فبلغ متوسط

إنتاج الفدان ٤.٥طن بانحراف معيارى ١.٥طن، هل تعتقد أن للنوع الجديد من التقاوى تأثير على إنتاج الفدان عند مستوى معنوية ١% علماً بأن إنتاج الأرز يتبع التوزيع الطبيعى.

٣٢- سحبت عينة من المترددين على أحد المراكز التجارية حجمها ٢٠فرد تبين أن متوسط مشتريات الفرد ٢٠٠جنيه بانحراف معيارى ٧٠جنيه، هل تؤيد الرأى القائل بأن هذه العينة مسحوبة من مجتمع متوسط مشتريات الفرد فيه ٢٥٠جنيه بدرجة ثقة ٩٥%. علماً بأن مبيعات المركز تتبع توزيعاً طبيعياً.

٣٣- إذا كانت نسبة الإصابة بالبلهارسيا فى إحدى القرى تبلغ ٣٥%، فإذا اخترنا عينة عشوائية من أهالى القرية حجمها ٥٠٠ فرد تبين أن منهم ٢٠٠ شخص مصابون بالبلهارسيا، هل تعتقد أن هذه العينة تمثل المجتمع الذى سحبت منه عند درجة ثقة ٩٩%.

٣٤- لمعرفة الفرق بين كفاءة العمال والعاملات فى إحدى شركات تصدر الموالح تم اختيار عينة من ٤٠ عامل وجد أن متوسط عدد الصناديق التى يعبئها العامل فى الساعة ٢٠صندوق بانحراف معيارى ٧ صناديق وتم سحب عينة من ٥٠ عاملة وجد أن متوسط عدد الصناديق التى تعبئها العاملة فى الساعة ٢٥ صندوق بانحراف معيارى ٨ صناديق، هل تؤيد الرأى القائل بأنه لا فرق بين كفاءة العامل والعاملة فى هذه الشركة عند مستوى معنوية ٥%.

٣٥- أوجد المطلوب فى التمرين السابق إذا علمت أن عدد العمال فى هذه الشركة ٢٠٠ عامل وعدد العاملات ٤٠٠.

٣٦- لمعرفة الفرق بين متوسط درجات الطلبة والطالبات بالفرقة الثالثة بالكلية فى مادة التكاليف تم سحب عينة من الطلبة من ١٥٠ طالب وجد أن متوسط درجاتهم فى مادة التكاليف يساوى ١٤ درجة، وسحبت عينة من الطالبات من ١٢٠ طالبة وجد أن متوسط درجاتهن فى مادة التكاليف ١٣درجة، فإذا علمت أن الانحراف المعيارى لدرجات مادة التكاليف يبلغ ٤درجات، هل تؤيد الفرض القائل بأن مستوى الطلبة أعلى من مستوى الطالبات فى مادة التكاليف عند مستوى معنوية ١%.

٣٧- لمعرفة الفرق بين وزن المواليد الذكور ووزن المواليد الإناث يوم ولادتهم تم تسجيل ٤٠ حالة ولادة فى أحد الأيام منها ٢٣ ذكور، ١٧إناث، فوجد أن متوسط وزن الذكور ٣.١كجم بانحراف معيارى ٠.٤كجم، وبلغ متوسط وزن الإناث ٢.٩كجم بانحراف معيارى ٠.٥كجم، هل تؤيد الرأى القائل بأن نوع المولود لا يؤثر فى وزنه عند الولادة بدرجة ثقة ٩٥%. علماً بأن وزن المولود يتبع توزيعاً طبيعياً.

٣٨- فى دراسة لمعرفة الفرق فى متوسط الوزن بين الطلبة والطالبات بشعبة اللغة الإنجليزية، تم سحب عينة من ٥٠٠ طالب فوجد أن متوسط وزن الطالب ٦٧كجم بانحراف معيارى ٨كجم وتم سحب عينة من ٤٠٠طالبة فوجد أن متوسط وزن الطالبة ٦١كجم بانحراف معيارى ٥كجم، هل تؤيد الفرض القائل بأن الطالبات أقل وزناً من الطلبة بدرجة ثقة ٩٩%.

٣٩- أوجد المطلوب فى التمرين السابق بفرض أن عدد طلاب شعبة اللغة الإنجليزية ٥٠٠طالب وعدد الطالبات ٧٠٠ طالبة.

٤٠- لمعرفة الفرق فى نسبة حضور المحاضرات بين الطلبة والطالبات تم سحب عينة من الطلبة حجمها ٢٠٠ طالب وجد أن نسبة الحضور بينهم ٦٥% وتم سحب عينة من الطالبات حجمها ١٥٠ طالبة وجد أن نسبة الحضور بينهن ٧٥%، هل تؤيد الفرض القائل بأن نسبة حضور الطلبة أقل من الطالبات عند مستوى معنوية ٥%.

٤١- إذا علمت أن نسبة حضور المحاضرات بين طلاب النظامى ٦٥% ونسبة الحضور من طلاب الانتساب الموجه ٦٠%، أخذت عينة عشوائية من طلبة النظامى حجمها ١٥٠ طالب فوجد أن نسبة الحضور فيها ٧٠% وأخذت عينة عشوائية من طلبة الانتساب الموجه حجمها ١٥٠ طالب فوجد أن نسبة الحضور فيها ٩٥%، فهل تعكس نسبة الحضور فى العينتين ارتفاع نسبة حضور طلبة النظامى عن طلبة الانتساب الموجه عند مستوى معنوية ١%.

٤٢- لمعرفة الفرق فى نسبة حضور المباريات بين جماهير الأهلى وجماهير الزمالك تم سحب عينة عشوائية من مشجعى النادى الأهلى حجمها ٥٠٠

مشجع وجد من بينهم ٣٥٠ مشجع يحضرون المباريات، وتم سحب عينة من مشجعى نادى الزمالك حجمها ٥٠٠ مشجع من بينهم ٢٧٠ مشجع يحضرون المباريات، هل تؤيد الرأى القائل بتساوى نسبة حضور جماهير الناديين للمباريات عند مستوى معنوية ٥%.

الباب السادس
الأرقام القياسية
Index Numbers

ويحتوى على :

الفصل الأول : الأرقام القياسية باستخدام المناسيب.

الفصل الثانى : الأرقام القياسية التجميعية.



الأهداف السلوكية :

بعد دراسة موضوع هذا الباب يجب أن يكون الدارس قادراً على أن:

١- يتعرف على أداة إحصائية لقياس التغيرات أو التقلبات فى قيمة متغير أو مجموعة من المتغيرات من فترة زمنية لأخرى أو من مكان لآخر.

٢- يتعرف على طرق تركيب الأرقام القياسية وطرق إيجاد الرقم القياسى باستخدام المناسيب البسيطة وطرق إيجاد الرقم القياسى باستخدام المناسيب المرجحة.

٣- يتعرف على طرق تركيب الأرقام القياسية التجمعية للأسعار البسيطة أو المرجحة بكميات سنة الأساس أو كميات سنة المقارنة أو الوسط الحسابى أو الوسط الهندسى للكميات أو الرقم القياسى الأمثل.

العناصر:

[١] الفصل الأول: الأرقام القياسية باستخدام المناسيب

١- الاعتبارات الواجب مراعاتها فى تركيب الأرقام القياسية.

٢- طرق تركيب الأرقام القياسية.

١/٢ الأرقام القياسية باستخدام المناسيب.

١/١/٢ الأرقام القياسية باستخدام المناسيب البسيطة.

٢/١/٢ الأرقام القياسية باستخدام المناسيب المرجحة.

[٢] الفصل الثانى: الأرقام القياسية التجميعية.

١- الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار.

٢- الأرقام القياسية التجميعية المرجحة.

١/٢ الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير).

٢/٢ الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنة المقارنة (رقم باش).

٣/٢ الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنتى الأساس والمقارنة (رقم مارشال ادجورث).

٤/٢ الرقم القياسى الأمثل (رقم فيشر).

[٣] الخلاصة.

[٤] تمارين على الباب السادس.

الفصل الأول

الأرقام القياسية باستخدام المناسيب

Index Numbers of Relatives

مقدمة:-

ظهرت فكرة الأرقام القياسية تحقيقا للرغبة فى قياس التغير فى الأسعار على وجه الخصوص فى فترات زمنية متتالية، ثم اتسع نطاق استخدامها لتشمل قياس التغير فى الكميات أو التغير فى القيمة بين فترات زمنية متتالية.

ومن ثم فإن الرقم القياسى عبارة عن أداة إحصائية لقياس التغيرات أو التقلبات فى متغير أو مجموعة من المتغيرات ذات الصلة من فترة زمنية لأخرى أو من مكان لأخر.

وعلى الرغم من تعدد المجالات التى تستخدم فيها الأرقام القياسية فإن الأسعار مازالت هى أهم نواحى النشاط التجارى التى تطبق عليها هذه الأداة الإحصائية.

الاعتبارات الواجب مراعاتها فى تركيب الأرقام القياسية:-

مع الأخذ فى الاعتبار أن الاهتمام ينصب أساسا على دراسة التغير فى الأسعار فإن هناك مجموعة من الاعتبارات التى يجب مراعاتها فى تركيب (إعداد) الأرقام القياسية منها:-

١- **تحديد السلع التى يراد تتبع التغير فى أسعارها:** بمعنى تحديد المواصفات التجارية والتسويقية لكل سلعة وتحديد المصادر التى تؤخذ منها أسعار هذه السلع هل المنتجين أم تجار الجملة أم تجار التجزئة.

٢- **تحديد سنة الأساس: Base Year** أى تحديد السنة التى ينسب إليها التغير والتى يجب أن تكون عادية أى لم يحدث بها أى تغيرات عرضية حيث أننا

إذا نسبنا إلى سنة تتسم بالكساد فإننا سنحصل على رقم قياسى مرتفع جداً بالقياس إلى سنة الأساس، وبالعكس إذا نسبنا إلى سنة تتسم بالانتعاش فإننا سنحصل على رقم قياسى منخفض جداً.

ومن الضرورى مراعاة طول الفترة الزمنية بين سنة الأساس وسنة المقارنة لأننا قد نجد سلعاً قد اختفت وسلعاً أخرى ظهرت لم يكن لها وجود لابد من إدخالها، كما أن الأهمية النسبية للسلع تتغير بمرور الزمن.

٣- **إذا كنا بصدد تركيب رقم قياسى للأسعار** فإنه من الضرورى الاستمرار فى تجميع الأسعار على فترات منتظمة من بداية فترة الدراسة (تاريخ سنة الأساس) إلى نهاية الفترة المحددة للدراسة (تاريخ سنة المقارنة) مع مراعاة توحيد عملية القياس خلال فترة الدراسة.

٤- **اختبار أوزان الترجيح:**-بمعنى إعطاء أوزان ترجيحية لأسعار بعض السلع لكى نعبر عن أهميتها بالنسبة الأخرى فإذا كان ما ينفق على الطعام يعادل ٤ أمثال ما ينفق على الملبس فإنه لابد أن يعادل الوزن الذى نعطيه للطعام ٤ أمثال الوزن الذى يعطى للملبس.

٥- **مقارنة أسعار السلعة أو السلع فى الفترات المختلفة** بسعرها أو أسعارها فى سنة الأساس للاستدلال على التغيرات التى طرأت على هذه الأسعار.

طرق تركيب الأرقام القياسية:-

هناك طرق عديدة لتركيب الأرقام القياسية لكل منها مزاياه التى تتفق مع طبيعة البيانات المتوفرة وتتلاءم مع ظروف استخدامها وبصفة عامة فإنه أياً ما كانت الطريقة التى نستخدمها، سواء اعتمدنا على المقاييس البسيطة أو المرجحة فإن هناك مدخلين أساسين هما:-

- **استخدام المناسيب Relatives**
- **استخدام الأرقام التجميعية Aggregative Numbers**

وقبل أن نشرع فى بيان الأنواع المختلفة للأرقام القياسية لابد أن نضع تعريفاً بالرموز التى سوف نستخدمها:-

السعر فى سنة الأساس $ع_٠$ — السعر فى سنة المقارنة $ع_١$

الكمية فى سنة الأساس $ك_٠$ — الكمية فى سنة المقارنة $ك_١$

القيمة فى سنة الأساس $ق_٠ = ع_٠ \times ك_٠$ — القيمة فى سنة المقارنة $ق_١ = ع_١ \times ك_١$

المنسوب م — الرقم القياسى ى

أولاً: الأرقام القياسية باستخدام المناسيب:-

المنسوب هو أبسط أنواع الأرقام القياسية، وهو مقياس للتغير فى قيمة ظاهرة فى سنة معينة (المقارنة) إلى قيمتها فى سنة سابقة (الأساس) كنسبة مئوية.

وهناك مناسيب عديدة: نتعرف عليها من خلال التقسيم التالى:-

فى حالة التعامل مع سلعة واحدة: Single Item

١- منسوب سعر السلعة = $\frac{\text{سعر السلعة فى سنة المقارنة}}{\text{سعر السلعة فى سنة الأساس}} \times ١٠٠$

منسوب سعر السلعة (م) = $\frac{ع_١}{ع_٠} \times ١٠٠$ **Price Relative**

٢- منسوب كمية السلعة = $\frac{\text{كمية السلعة فى سنة المقارنة}}{\text{كمية السلعة فى سنة الأساس}} \times ١٠٠$

منسوب كمية السلعة (م) = $\frac{ك_١}{ك_٠} \times ١٠٠$ **Quantity Relative**

٣- منسوب قيمة السلعة= $\frac{\text{قيمة السلعة فى سنة المقارنة}}{\text{قيمة السلعة فى سنة الأساس}} \times ١٠٠$

منسوب قيمة السلعة (م) = $\frac{ق_1}{ق_0}$ × ١٠٠	**Value Relative**

٤- منسوب أجر العامل = $\frac{\text{أجر العامل فى سنة المقارنة}}{\text{أجر العامل فى سنة الأساس}}$ × ١٠٠ **Wage Relative**

وهكـذا،،

مثال (١):- بفرض أن سعر سلعة معينة فى سنة ١٩٩٦ هو ٢٥٠ جنيه ثم أصبح ٢٨٠جنية فى سنة ١٩٩٧. احسب التغير النسبى الذى حدث فى سعر هذه السلعة.

الحـــل

ع. =٢٥٠ ع١ = ٢٨٠

منسوب سعر السلعة (م)= $\frac{ع_1}{ع_0}$ × ١٠٠

م = $\frac{٢٨٠}{٢٥٠}$ × ١٠٠= ١١٢%

ومعنى ذلك أن سعر السلعة فى سنة ١٩٩٧ زاد بنسبة ١٢% عن سعرها فى سنة ١٩٩٦.

فى حالة التعامل مع مجموعة من السلع: Group of Items

إذا كان لدينا مجموعة من السلع عددها (ن) سلعة فإنه يمكن حساب عدد (ن) من المناسيب أى $م_1$،$م_2$، $م_3$....، $م_ن$ ومن ثم فإنه يمكن حساب الرقم القياسى للتغير فى أسعار هذه المجموعة السلعية باعتباره متوسطا لمناسيب أسعار هذه السلع وهذه المتوسطات إما أن تكون حسابية أو هندسية أو توافقية كما يمكن أن تكون بسيطة أو مرجحة.

١- الرقم القياسى باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب:-

$$\text{الرقم القياسى} = \frac{\text{مجموع المناسيب}}{\text{عددها}}$$

$$ى = \frac{م_{١} + م_{٢} + م_{٣} + .. + م_{ن}}{ن}$$

$$ى = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} م_{ر}}{ن}$$

٢- الرقم القياسى باستخدام الوسط الهندسى للمناسيب:-

$$ى = \sqrt[ن]{م_{١} \times م_{٢} \times م_{٣} \times ..... \times م_{ن}}$$

$$لو\ ى = \frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} لو\ م_{ر}$$

٣- الرقم القياسى باستخدام الوسط التوافقى للمناسيب:

$$ى = \frac{ن}{\frac{١}{م_{١}} + \frac{١}{م_{٢}} + \frac{١}{م_{٣}} + ... + \frac{١}{م_{ن}}}$$

$$ى = \frac{ن}{\sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{م_{ر}}}$$

الوسط التوافقى عبارة عن مقلوب الوسط الحسابى لمقلوبات المناسيب.

مثال (٢):- الجدول التالى يوضح أسعار ٤ سلع فى سنتى ١٩٨٧، ١٩٩٧:-

السلعة / السنة	أ	ب	جـ	د
١٩٨٧	٢٠	١٠٠	٤٥	٨
١٩٩٧	٦٠	٢٥٠	٩٠	٢٠

والمطلوب:-

حساب الرقم القياسى لأسعار هذه السلع باستخدام الوسط الحسابى والوسط الهندسى والوسط التوافقى لمناسيب الأسعار.

الحـل

نبدأ بحساب مناسيب الأسعار للسلع الأربع:-

منسوب سعر السلعة أ = $\frac{٦٠}{٢٠} \times ١٠٠ = ٣٠٠\%$

منسوب سعر السلعة ب = $\frac{٢٥٠}{١٠٠} \times ١٠٠ = ٢٥٠\%$

منسوب سعر السلعة جـ = $\frac{٩٠}{٤٥} \times ١٠٠ = ٢٠٠\%$

منسوب سعر السلعة د = $\frac{٢٠}{٨} \times ١٠٠ = ٢٥٠\%$

١- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب:-

$$ى = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} م_ر}{ن}$$

$$= \frac{٣٠٠+٢٥٠+٢٠٠+٢٥٠}{٤} = \frac{١٠٠٠}{٤} = ٢٥٠\%$$

٢- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الهندسى للمناسيب:-

$$\text{لو ى} = \frac{١}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{لو م}_{\text{ر}}$$

$$\text{لو ى} = \frac{١}{٤} (\text{لو}٣٠٠ + \text{لو}٢٥٠ + \text{لو } ٢٠٠ + \text{لو}٢٥٠)$$

$$\text{لو ى} = \frac{١}{٤} (٢.٤٧٧ + ٢.٣٩٨ + ٢.٣٠١ + ٢.٣٩٨)$$

$$\text{لو ى} = \frac{١}{٤} (٩.٥٧٤)$$

لو ى = ٢.٣٩٧٥ وبإيجاد العدد المقابل للوغاريتم

∴ ى = ٢٤٧.٥%

٣- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط التوافقى للمناسيب:-

$$\text{ى} = \frac{\text{ن}}{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \frac{١}{\text{م}_{\text{ر}}}}$$

$$\text{ى} = \frac{٤}{\frac{١}{٣٠٠} + \frac{١}{٢٥٠} + \frac{١}{٢٠٠} + \frac{١}{٢٥٠}}$$

$$\text{ى} = \frac{٤}{٠.٠٠٣ + ٠.٠٠٤ + ٠.٠٠٥ + ٠.٠٠٤} = \frac{٤}{٠.٠١٦} = ٢٥٠\%$$

ثانياً: الأرقام القياسية باستخدام المناسيب المرجحة:-

إن الأرقام القياسية السابقة والخاصة بمتوسطات المناسيب أعطت نفس الدرجة من الأهمية لكل سلعة وهو ما قد يكون مخالفا للحقيقة والواقع، حيث تتفاوت الأهمية النسبية لكل سلعة، ومن ثم فإنه يفضل أن يعكس الرقم القياسى المحسوب هذه الحقيقة ومن الشائع استخدام قيمة السلعة فى سنة الأساس (ق.) أو

فـى سـنة المقارنـة ($ق_١$) أو الأهميـة النسـبية لهـا (و) كـأوزان لتـرجيح مناسـيب الأسعار.

وقيمة السلعة فى سنة الأساس $ق_. = ع_. \times ك_.$

وقيمة السلعة فى سنة المقارنة $ق_١ = ع_١ \times ك_١$

والأهمية النسبية (أو الأوزان النسبية) لابد ان يكون مجموعها = ١٠٠%

١- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة:

$$\text{الرقم القياسى} = \frac{\text{مجموع حاصل ضرب المناسيب} \times \text{أوزان الترجيح}}{\text{مجموع أوزان الترجيح}}$$

$$ى = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ق_. \, م_ر}{\sum ق_.}$$ باستخدام قيمة السلعة فى سنة الأساس ق.

أو $$ى = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ق_١ \, م_ر}{\sum ق_١}$$ باستخدام قيمة السلعة فى سنة المقارنة $ق_١$

أو $$ى = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} و \, م_ر}{\sum و}$$ باستخدام الأوزان النسبية و

٢- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الهندسى للمناسيب المرجحة:-

$$ى = \sqrt[\sum ق_.]{(م_١)^{ق_.} \times (م_٢)^{ق_.} \times (م_٣)^{ق_.} \times \ldots \times (م_ن)^{ق_.}}$$

$$\text{لو } ى = \frac{١}{\sum ق_.} \left(\sum_{ر=١} ق_. \, \text{لو } م_ر \right)$$ باستخدام قيمة السلعة فى سنة الأساس ق.

أو ى = مجـ ق١ $\sqrt[\text{مجـ ق}_1]{(م_1)^{ق_1} \times (م_2)^{ق_1} \times (م_3)^{ق_1} \times \ldots \times (م_ن)^{ق_1}}$

$$\text{لو ى} = \frac{1}{\text{مجـ ق}_1} \left(\sum_{ر=1}^{ن} \text{ق}_1 \text{ لو م}_ر \right)$$ باستخدام قيمة السلعة فى سنة المقارنة $ق_1$.

أو ى = $\sqrt[\text{مجـ و}]{(م_1)^{و_1} \times (م_2)^{و_1} \times (م_3)^{و_1} \times \ldots \times (م_ن)^{و_ن}}$

$$\text{لو ى} = \frac{1}{\text{مجـ و}} \left(\sum_{ر=1}^{ن} \text{و لو م}_ر \right)$$ باستخدام الأوزان النسبية و

٣- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط التوافقى للمناسيب المرجحة:-

$$\text{ى} = \frac{\text{مجـ ق}_0}{\sum_{ر=1}^{ن} \left(\frac{ق_0}{م_ر}\right)}$$ باستخدام قيمة السلعة فى سنة الأساس $ق_0$.

أو $$\text{ى} = \frac{\text{مجـ ق}_1}{\sum_{ر=1}^{ن} \left(\frac{ق_1}{م_ر}\right)}$$ باستخدام قيمة السلعة فى سنة المقارنة $ق_1$

أو $$\text{ى} = \frac{\text{مجـ و}}{\sum_{ر=1}^{ن} \left(\frac{و}{م_ر}\right)}$$ باستخدام الأوزان النسبية و

مثال (٣):- فيما يلى بيان بأسعار مجموعة من السلع والكميات المنتجة منها فى سنتى ١٩٨٧، ١٩٩٧:-

السلعة	السعر		الكمية المنتجة	
	١٩٨٧	١٩٩٧	١٩٨٧	١٩٩٧
أ	١٢	١٨	٢١٠	٣٠٠
ب	١٨	٢٢	٥٢٠	٦٠٠
جـ	١٠	١٥	٤٦	٥٠
د	٢٠	٣٠	٨٨	١٠٠

والمطلوب:-

١- حساب الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة الأساس وكذلك المرجحة بقيمة السلعة فى سنة المقارنة.

٢- حساب الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الهندسى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة الأساس وكذلك المرجحة بقيمة السلعة فى سنة المقارنة.

٣- حساب الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط التوافقى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة الأساس وكذلك المرجحة بقيمة السلعة فى سنة المقارنة.

الحــل

السلعة	مناسيب الأسعار ($م_ر$)	لو $م_ر$	قيمة السلعة فى سنة الأساس (ق.)	قيمة السلعة فى سنة المقارنة (ق١)
أ	١٥٠%	٢.١٧٦	٢٥٢٠	٥٤٠٠
ب	١٢٢%	٢.٠٨٦	٩٣٦٠	١٣٢٠٠
جـ	١٥٠%	٢.١٧٦	٤٦٠	٧٥٠
د	١٥٠%	٢.١٧٦	١٧٦٠	٣٠٠٠
المجموع			١٤١٠٠	٢٢٣٥٠

$\text{ق}_0 \text{م}_\text{ر}$	$\text{ق}_1 \text{م}_\text{ر}$	$\text{ق}_0 \text{ لو م}_\text{ر}$	$\text{ق}_1 \text{ لو م}_\text{ر}$	$\frac{\text{ق}_0}{\text{م}_\text{ر}}$	$\frac{\text{ق}_1}{\text{م}_\text{ر}}$
٣٧٨٠٠٠	٨١٠٠٠٠	٥٤٨٣.٧٥	١١٧٥٠.٨٩	١٦.٨	٣٦
١١٤١٩٢٠	١٦١٠٤٠٠	١٩٥٢٨.٣٣	٢٧٥٣٩.٩٥	٧٦.٧	١٠٨.٢
٦٩٠٠٠	١١٢٥٠٠	١٠٠١.٠٠	١٦٣٢.٠٧	٣.٠٧	٥.٠
٢٦٤٠٠٠	٤٥٠٠٠٠	٣٨٢٩.٩٢	٦٥٢٨.٢٧	١١.٧٣	٢٠.٠
١٨٥٢٩٢٠	٢٩٨٢٩٠٠	٢٩٨٤٣	٤٧٤٥١.١٨	١٠٨.٣	١٦٩.٢

١- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة الأساس:-

$$\text{ى} = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}_0 \text{م}_\text{ر}}{\text{مج ق}_0} = \frac{١٨٥٢٩٢٠}{١٤١٠٠} = ١٣١.٤\%$$

٢- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة المقارنة:-

$$\text{ى} = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}_1 \text{م}_\text{ر}}{\text{مج ق}_1} = \frac{٢٩٨٢٩٠٠}{٢٢٣٥٠} = ١٣٣.٥\%$$

٣- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الهندسى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة الأساس:-

$$\text{لو ى} = \frac{١}{\text{مج ق}_0} \left(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}_0 \text{ لو م}_\text{ر}\right)$$

$$\text{لو ى} = \frac{١}{١٤١٠٠} (٢٩٨٤٣)$$

لو ى = ٢.١١٦٥ وبإيجاد العدد المقابل للوغاريتم

ى= ١٣٠.٨%

٤- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الهندسى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة المقارنة:

$$\text{لو ى} = \frac{١}{\text{مج ق}_١} \left(\sum_{ر=١}^{ن} \text{ق}_١ \text{ لو م}_ر \right)$$

$$\text{لو ى} = \frac{١}{٢٢٣٥٠} (٤٧٤٥١.١٨)$$

لو ى = ٢.١٢٣١ وبإيجاد العدد المقابل للوغاريتم.

ى = ١٣٢.٨%.

٥- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط التوافقى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة الأساس:

$$\text{ى} = \frac{\text{مج ق}_٠}{\sum_{ر=١}^{ن} \left(\frac{\text{ق}_٠}{\text{م}_ر}\right)} = \frac{١٤١٠٠}{١٠٨.٣} = ١٣٠.٢\%$$

٦- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط التوافقى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة المقارنة:

$$\text{ى} = \frac{\text{مج ق}_١}{\sum_{ر=١}^{ن} \left(\frac{\text{ق}_١}{\text{م}_ر}\right)} = \frac{٢٢٣٥٠}{١٦٩.٢} = ١٣٢.١\%$$

مثال (٤):- تنتج إحدى الشركات نوع معين من السلع وتستخدم فى إنتاجه أربعة مكونات أساسية هى أ، ب، جـ ، د فإذا علمت أن أسعار هذه المكونات فى سنتى ١٩٨٥، ١٩٩٥ كانت كما يلى:-

السلعة	أ	ب	جـ	د
السعر فى سنة ١٩٨٥	٢٢	٣٠	٤٥	١٠٠
السعر فى سنة ١٩٩٥	٢٨	٣٥	٦٠	١٦٠

فإذا علمت أن هذه المكونات تمثل النسب التالية فى إنتاج هذه السلعة:

١٥% ، ٥٠% ، ١٠% ، ٢٥% على الترتيب.

المطلوب:-

١- حساب الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة.

٢- حساب الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الهندسى للمناسيب المرجحة.

٣- حساب الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط التوافقى للمناسيب المرجحة.

الحــل

السلعة	المناسيب ($م_ر$)	لو $م_ر$	أوزان الترجيح (و)	و$م_ر$	و لو $م_ر$	$\frac{و}{م_ر}$
أ	%١٢٧	٢.١٠٤	%١٥	١٩٠٥	٣١.٥٦	٠.١١٨
ب	%١١٧	٢.٠٦٨	%٥٠	٥٨٥٠	١٠٣.٤١	٠.٤٢٧
جـ	%١٣٣	٢.١٢٤	%١٠	١٣٣٠	٢١.٢٤	٠.٠٧٥
د	%١٦٠	٢.٢٠٤	%٢٥	٤٠٠٠	٥٥.١٠	٠.١٥٦
المجموع			%١٠٠	١٣٠٨٥	٢١١.٣١	٠.٧٧٦

١- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة:-

$$ى = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} و\, م_ر}{مجـ و_ن} = \frac{١٣٠٨٥}{١٠٠} = ٢\%١٣٠.٨٥$$

٢- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط الهندسى للمناسيب المرجحة:-

$$لو\ ى = \frac{١}{مجـ و} \left(\sum_{ر=١} و\ لو\ م_ر\right)$$

$$لو\ ى = \frac{١}{١٠٠} (٢١١.٣١) = ٢.١١٣١$$ وبإيجاد العدد المقابل للوغاريتم

ى = %١٢٩.٧٥

٣- الرقم القياسى للأسعار باستخدام الوسط التوافقى للمناسيب المرجحة:-

$$ى = \frac{مجـ و}{\sum_{ر=١} \frac{و}{م_ر}} = \frac{١٠٠}{٠.٧٧٦} = \%١٢٨.٩$$

الفصل الثانى

الأرقام القياسية التجميعية

Aggregative Index Numbers

المقدمة:

لاشك أن استخدام المناسيب يتيح لنا التعرف على التغير الذى يطرأ على كل سلعة على حدة، بالإضافة إلى إمكان استخدام تلك المناسيب فى تركيب رقم قياسى لدراسة التغير على مستوى المجموعة السلعية ككل.

أما الأرقام القياسية التجميعية فإنها تتعامل مع المجموعات السلعية كوحدة واحدة مع إعطاء أهمية متساوية لكل مكوناتها (الأرقام البسيطة) أو ترجيحها بشكل يعكس تفاوت أهميتها النسبية (الأرقام المرجحة).

أولاً: الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار:-

Simple Aggregate Index Number:

يتميز هذا الرقم بالسهولة التامة حيث يتم تجميع أسعار السلع المكونة للمجموعة الخاضعة للدراسة فى كل من سنتى المقارنة والأساس وإيجاد النسبة المئوية بينهما بعد الضرب ×١٠٠.

أى أن

$$\text{ى} = \frac{\text{مجـ ع}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}} \times ١٠٠$$

ولاشك أن هناك قيودا على استخدام هذا الرقم من أهمها ضرورة تجانس وحدات القياس لمجموعة السلع.

ثانياً: الأرقام القياسية التجميعية المرجحة:-

Weighted Aggregate Index Numbers:

ويتم ترجيح أسعار السلع إما باستخدام كميات سنة الأساس (ك.) أو باستخدام كميات سنة المقارنة (ك١) أو باستخدام الوسط الحسابى أو الوسط الهندسى لكميات سنتى الأساس والمقارنة.

١- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير):- (Laspeyre's Index)

ويعتمد هذا الرقم على الكميات المتداولة من السلع فى سنة الأساس (ك.) ولهذا يعرف بطريقة سنة الأساس Base Year Method ويأخذ هذا الرقم الصيغة التالية:-

$$\text{ى} = \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ ك}_{.}}{\text{مجـ ع}_{.}\text{ ك}_{.}} \times ١٠٠$$

٢- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنة المقارنة (رقم باش): -: Pache's Index

ويعتمد هذا الرقم على الكميات المتداولة من السلع فى سنة المقارنة (ك١) ولهذا يعرف بطريقة سنة المقارنة Given Year Method ويأخذ هذا لرقم الصيغة التالية:-

$$\text{ى} = \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{.}\text{ ك}_{١}} \times ١٠٠$$

٣- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنتى الأساس والمقارنة (رقم مارشال إدجورث):- Marshal- Edgeworth Index

لاشك أن اعتماد رقم لاسبير على الكميات المتداولة من السلع فى سنة الأساس واعتماد رقم باش على الكمية المتداولة من السلع فى سنة المقارنة يفترض

معهما استمرار ثبات الكميات المتداولة من السلع كما هى خلال فترة الدراسة وهو افتراض يستبعد تأثير التغير فى أسعار السلع على الكميات المتداولة منها ومن ثم يؤدى إلى زيادة فى قيمة رقم لاسبير ونقص فى قيمة رقم باش. وعلاجا لهذه المشكلة اقترح (مارشال وإدجورث) استخدام الكميات المتداولة من السلع فى سنتى الأساس والمقارنة إما باستخدام الوسط الحسابى للكميات، أو الوسط الهندسى للكميات:-

١/٣ الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بالوسط الحسابى للكميات:

$$\text{ى} = \frac{\text{مج ع}_{١}\,(\text{ك}_{.} + \text{ك}_{١})}{\text{مج ع}_{.}\,(\text{ك}_{.} + \text{ك}_{١})} \times ١٠٠$$

٢/٣ الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بالوسط الهندسى للكميات:

$$\text{ى} = \frac{\text{مج ع}_{١}\,\sqrt{(\text{ك}_{.}\,\text{ك}_{١})}}{\text{مج ع}_{.}\,\sqrt{(\text{ك}_{.}\,\text{ك}_{١})}} \times ١٠٠$$

٤- الرقم القياسى الأمثل (رقم فيشر) :

Ideal Index Number (fisher's Index)

توصل إرفنج فيشر Irving Fisher إلى رقم قياسى يجمع بين رقمى لاسبير وباش وأطلق عليه الرقم القياسى الأمثل ويأخذ الصورة التالية:

$$\text{ى} = \sqrt{\frac{\text{مج ع}_{١}\text{ك}_{.}}{\text{مج ع}_{.}\text{ك}_{.}} \times \frac{\text{مج ع}_{١}\text{ك}_{١}}{\text{مج ع}_{.}\text{ك}_{١}}} \times ١٠٠$$

أو

$$\text{رقم فيشر} = \sqrt{\text{رقم لاسبير} \times \text{رقم باش}} \times ١٠٠$$

مثـال (١): الجدول التـالى يوضـح أسـعار وكميـات المـواد المسـتخدمة فـى صـناعة إحدى السلع فى عامى ١٩٩٠، ١٩٩٥:

المواد	**الأسعار**		**الكميات**	
	١٩٩٠	**١٩٩٥**	**١٩٩٠**	**١٩٩٥**
أ	٣٠	٤٠	٢٠	٣٠
ب	١٥	٣٠	١٠	٢٠
جـ	٥	١٠	٧٥	٨٥
د	٨	٢٠	١٠٠	١٢٠

<u>والمطلوب:</u>

١ - الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار.

٢- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير)

٣- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنة المقارنة (رقم باش).

٤-الـرقم القياسـى التجميعـى للأسـعار المرجحـة بالوسـط الحسـابى للكميـات (رقـم مارشال إدجورث)

٥-الـرقم القياسـى التجميعـى للأسـعار المرجحـة بالوسـط الهندسـى للكميـات (رقـم مارشال – إدجورث).

٦-الرقم القياسى الأمثل (رقم فيشر).

الحـل

المواد	**ع.**	**ع١**	**ك.**	**ك١**	**ع١ ك.**	**ع.ك.**	**ع١ ك١**	**ع. ك١**
أ	٣٠	٤٠	٢٠	٣٠	٨٠٠	٦٠٠	١٢٠٠	٩٠٠
ب	١٥	٣٠	١٠	٢٠	٣٠٠	١٥٠	٦٠٠	٣٠٠
جـ	٥	١٠	٧٥	٨٥	٧٥٠	٣٧٥	٨٥٠	٤٢٥
د	٨	٢٠	١٠٠	١٢٠	٢٠٠٠	٨٠٠	٢٤٠٠	٩٦٠
المجموع	٥٨	١٠٠	٢٠٥	٢٥٥	٣٨٥٠	١٩٢٥	٥٠٥٠	٢٥٨٥

ك.+ ك١	ع١ (ك.+ ك١)	ع. (ك. + ك١)	$\sqrt{\text{ك.ك}_1}$	ع١ $\sqrt{\text{ك.ك}_1}$	ع. $\sqrt{\text{ك.ك}_1}$
٥٠	٢٠٠٠	١٥٠٠	٢٤.٤٩٥	٩٧٩.٨	٧٣٤.٨
٣٠	٩٠٠	٤٥٠	١٤.١٤٢	٤٢٤.٣	٢١٢.١
١٦٠	١٦٠٠	٨٠٠	٧٩.٨٤٤	٧٩٨.٤	٣٩٩.٢
٢٢٠	٤٤٠٠	١٧٦٠	١٠٩.٥٤٥	٢١٩٠.٩	٨٧٦.٤
٤٦٠	٨٩٠٠	٤٥١٠	٢٢٨.٠٢٦	٤٣٩٣.٤	٢٢٢٢.٥

١- الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار:-

$$\text{ى} = \frac{\text{مجـ ع}_1}{\text{مجـ ع.}} \times ١٠٠ = \frac{١٠٠}{٥٨} \times ١٠٠ = ١٧٢.٤\%$$

٢- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير):

$$\text{ى} = \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك.}}{\text{مجـ ع.ك.}} \times ١٠٠ = \frac{٣٨٥٠}{١٩٢٥} = ٢٠٠\%$$

٣- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بكميات سنة المقارنة (رقم باش):

$$\text{ى} = \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ ع.ك}_1} \times ١٠٠ = \frac{٥٠٥٠}{٢٥٨٥} \times ١٠٠ = ١٩٥.٤\%$$

٤- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بالوسط الحسابى للكميات (رقم مارشال- إدجورث):

$$\text{ى} = \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ (ك.+ ك}_1)}{\text{مجـ ع. (ك.+ ك}_1)} \times ١٠٠ = \frac{٨٩٠٠}{٤٥١٠} \times ١٠٠ = ١٩٧.٣\%$$

٥- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجحة بالوسط الهندسى للكميات (رقم مارشال- إدجورث):

$$\text{ى} = \frac{\text{مجـ ع}_1 \sqrt{\text{(ك. ك}_1)}}{\text{مجـ ع.} \sqrt{\text{(ك. ك}_1)}} \times ١٠٠ = \frac{٤٣٩٣.٤}{٢٢٢٢.٥} \times ١٠٠ = ١٩٧.٧\%$$

٦- الرقم القياسى الأمثل (رقم فيشر):-

$$ى = \sqrt{\frac{مج\ ع_1 ك_.}{مج\ ع_. ك_.} \times \frac{مج\ ع_1 ك_1}{مج\ ع_. ك_1}} \times ١٠٠$$

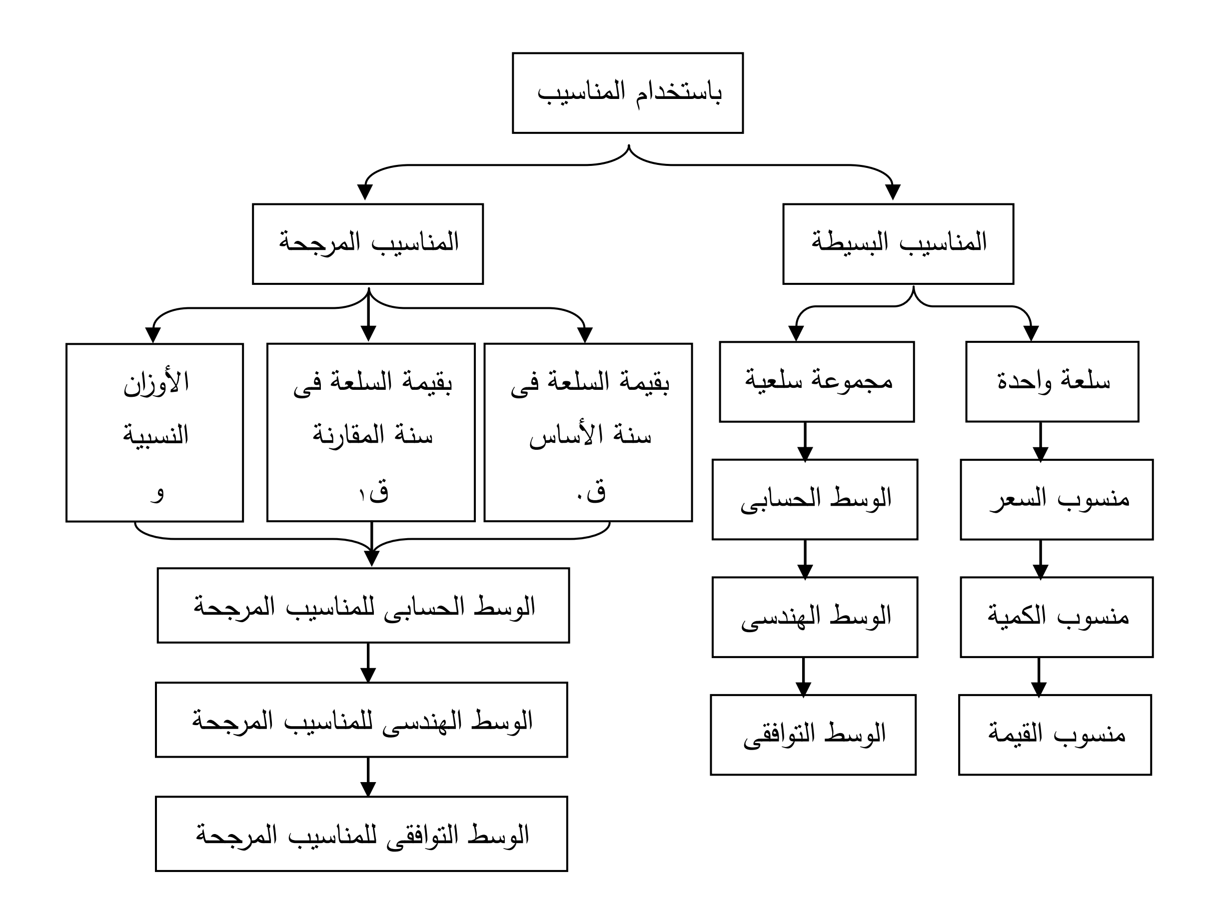
$$= \sqrt{\frac{٣٨٥٠}{١٩٢٥} \times \frac{٥٠٥٠}{٢٥٨٥}} \times ١٠٠$$

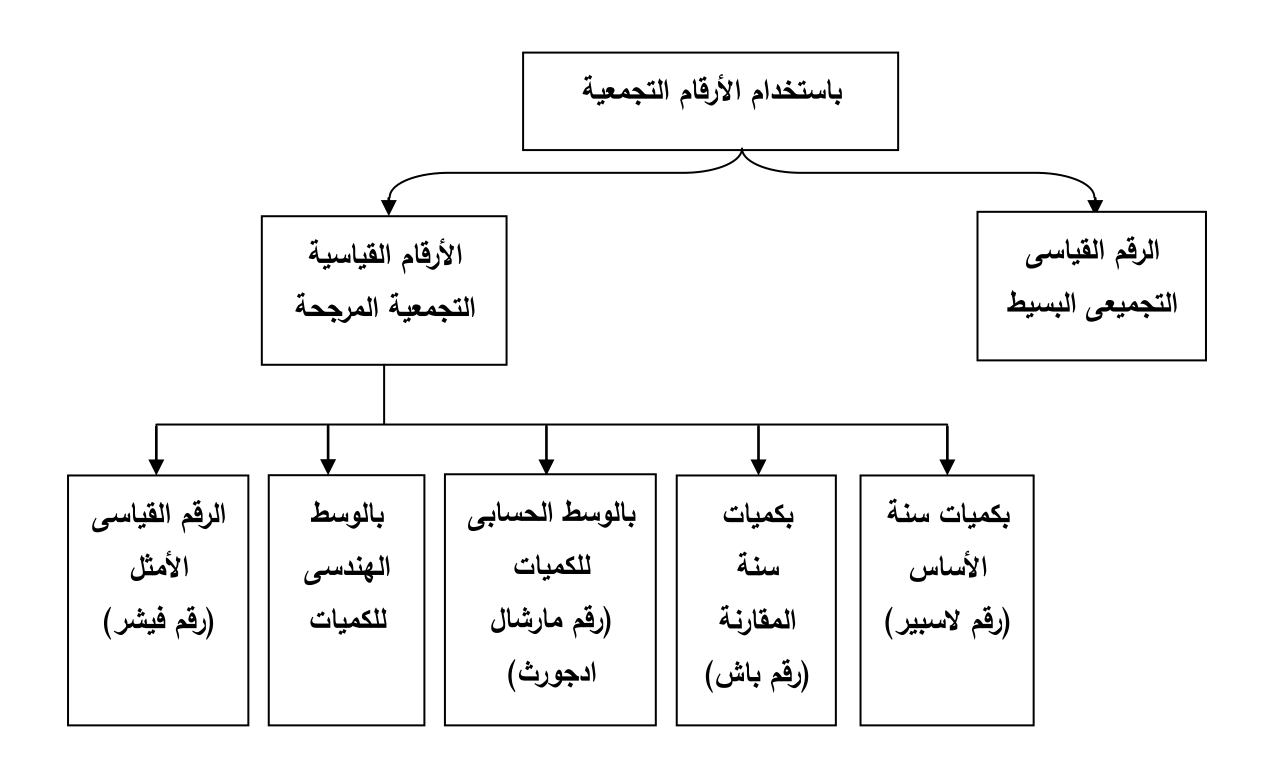
$$= \sqrt{٣.٩٠٧١٦} \times ١٠٠ = ١.٩٧٧ \times ١٠٠ = ١٩٧.٧\%$$

الخلاصـــــــة

الأرقام القياسية

طرق تركيب الأرقام القياسية :




باستخدام الأرقام التجمعية
الرقم القياسى التجميعى البسيط
الأرقام القياسية التجمعية المرجحة
بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير)
بكميات سنة المقارنة (رقم باش)
بالوسط الحسابى للكميات (رقم مارشال ادجورث)
بالوسط الهندسى للكميات
الرقم القياسى الأمثل (رقم فيشر)

تمارين على الأرقام القياسية

١) فيما يلى بيان بأسعار مجموعة من السلع والكميات المنتجة منها فى سنتى ١٩٨٥، ١٩٩٨:-

السلعة	السعر		الكمية المنتجة	
	١٩٩٥	١٩٩٨	١٩٩٥	١٩٩٨
أ	١٢	١٨	٢١٠	٣٠٠
ب	١٨	٢٢	٥٢٠	٦٠٠
جـ	١٠	١٥	٤٦	٥٠
د	٢٠	٣٠	٨٨	١٠٠

اعتبر سنة ١٩٩٥ هى سنة الأساس وأوجد الرقم القياسى للأسعار فى سنة ١٩٩٨ باستخدام:-

١- الوسط الحسابى للمناسيب.

٢- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة المقارنة

٣- الوسط الهندسى للمناسيب المرجحة بقيمة السلعة فى سنة الأساس.

٤- الرقم القياسى للأسعار المرجحة بكميات سنة الأساس.

٥-الرقم القياسى للأسعار المرجحة بكميات سنة المقارنة.

٦- الرقم القياسى الأمثل.

٢) إذا علمت أن الرقم القياسى لأسعار سنة ١٩٩٠ بالنسبة لأسعار سنة ١٩٨٠ هو ٢٥٠% وأن الرقم القياسى لأسعار سنة ١٩٩٥ بالنسبة لأسعار سنة ١٩٨٠ هو ٣٠٠% أوجد الرقم القياسى لأسعار سنة ١٩٩٥ بالنسبة لأسعار ١٩٩٠ ثم أوجد نسبة التغير فى السعر.

٣) تتضمن المجموعة السلعية للحبوب أربعة سلع أساسية هى القمح والذرة والأرز والفول وقد توفرت لدينا البيانات التالية عن الأسعار والكميات المتداولة لهذه السلع:-

الفول	الأرز	الذرة	القمح	السلعة
٤٠	٦٠	٣٠	٥٠	السعر للطن عام ١٩٩٠
٥٠	٩٠	٤٥	٦٠	السعر للطن عام ١٩٩٥
٠.٢٦	٢.٥	٣.٣	٢	الكميات بالمليون طن عام ١٩٩٥

والمطلوب:– حساب الرقم القياسى لأسعار هذه المجموعة السلعية باستخدام رقم قياسى مناسب.

٤) توفرت لدينا بيانات عن السعر بالجنية والكمية المستخدمة (بالطن) لمستلزمات الإنتاج الداخلة فى إحدى الصناعات فكانت على النحو التالى:–

الكمية		السعر		النوع
١٩٩٥	١٩٩٠	١٩٩٥	١٩٩٠	
١٥٠	١٤٠	٣٠٠٠	٢٧٠٠	أ
١٠٠	٦٠	٩٠٠٠	٧٥٠٠	ب
١٥٠	١٠٠	٢٢٠٠	١٥٠٠	جـ

المطلوب:-

١- حساب الرقم القياسى للأسعار المرجحة بالوسط الحسابى للكميات.

٢- حساب الرقم القياسى للأسعار المرجحة بالوسط الهندسى للكميات

٣- حساب الرقم القياسى الأمثل للأسعار.

٥) يقوم أحد المصانع بإنتاج أربعة سلع هى أ،ب،جـ،د وفيما يلى بيان بكميات الإنتاج والأسعار عن عامى ١٩٩٥، ١٩٩٨:–

السلعة / السنة	أ		ب		جـ		د	
	كمية	السعر	كمية	السعر	كمية	السعر	الكمية	السعر
١٩٩٥	٢٥٠	٦٠	٤٠٠	٨٠	٣٠٠	١٥٠	١٠٠	٢٥٠
١٩٩٨	٣٠٠	٩٠	٦٠٠	١٥٠	٥٠٠	٣٢٠	٢٢٠	٦٠٠

والمطلوب:-

١- حساب الرقم القياسى الأمثل للأسعار.

٢- حساب الرقم القياسى باستخدام الوسط الهندسى لمناسيب الأسعار وذلك للسلعتين أ، ب فقط.

٣- حساب الرقم القياسى باستخدام الوسط الحسابى لمناسيب الكميات وذلك للسلعتين جـ، د فقط.

الملاحق

جدول رقم (١)
التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
٠.٠٠	٠.٥٠٠٠٠	٠.١٥	٠.٥٥٩٦٢	٠.٣٠	٠.٦١٧٩١
٠.٠١	٠.٥٠٣٩٩	٠.١٦	٠.٥٦٣٥٦	٠.٣١	٠.٦٢١٧٢
٠.٠٢	٠.٥٠٧٩٨	٠.١٧	٠.٥٦٧٤٩	٠.٣٢	٠.٦٢٥٥٢
٠.٠٣	٠.٥١١٩٧	٠.١٨	٠.٥٧١٤٢	٠.٣٣	٠.٦٢٩٣٠
٠.٠٤	٠.٥١٥٩٥	٠.١٩	٠.٥٧٥٣٥	٠.٣٤	٠.٦٣٣٠٧
٠.٠٥	٠.٥١٩٩٤	٠.٢٠	٠.٥٧٩٢٦	٠.٣٥	٠.٦٣٣٠٧
٠.٠٦	٠.٥٢٣٩٢	٠.٢١	٠.٥٨٣١٧	٠.٣٦	٠.٦٤٠٥٨
٠.٠٧	٠.٥٢٧٩٠	٠.٢٢	٠.٥٨٧٠٦	٠.٣٧	٠.٦٤٤٣١
٠.٠٨	٠.٥٣١٨٦	٠.٢٣	٠.٥٩٠٩٥	٠.٣٨	٠.٦٤٨٠٣
٠.٠٩	٠.٥٣٥٨٦	٠.٢٤	٠.٥٩٤٨٣	٠.٣٩	٠.٦٥١٧٣
٠.١٠	٠.٥٣٩٨٣	٠.٢٥	٠.٥٩٨٧٧	٠.٤٠	٠.٦٥٥٤٢
٠.١١	٠.٥٤٣٨٠	٠.٠٢٦	٠.٦٠٢٥٧	٠.٤١	٠.٦٥٩١٠
٠.١٢	٠.٥٤٧٧٦	٠.٢٧	٠.٦٠٦٤٢	٠.٤٢	٠.٦٦٢٧٦
٠.١٣	٠.٥٥١٧٢	٠.٢٨	٠.٦١٠٢٦	٠.٤٣	٠.٦٦٦٤٠
٠.١٤	٠.٥٥٥٦٧	٠.٢٩	٠.٦١٤٠٩	٠.٤٤	٠.٦٧٠٠٣

تابع جدول رقم (١)
التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
٠.٤٥	٠.٦٧٣٦٤	٠.٦٥	٠.٧٤٢١٥	٠.٨٥	٠.٨٠٢٣٤
٠.٤٦	٠.٦٧٧٢٤	٠.٦٦	٠.٧٤٥٣٧	٠.٨٦	٠.٨٠٥١١
٠.٤٧	٠.٦٨٠٨٢	٠.٦٧	٠.٧٤٨٥٧	٠.٨٧	٠.٨٠٧٨٥
٠.٤٨	٠.٦٨٤٣٩	٠.٦٨	٠.٧٥١٧٥	٠.٨٨	٠.٨١٠٥٧
٠.٤٩	٠.٦٨٧٩٣	٠.٦٩	٠.٧٥٤٩٠	٠.٨٩	٠.٨١٣١٧
٠.٥٠	٠.٦٩١٤٦	٠.٧٠	٠.٧٥٨٠٤	٠.٩٠	٠.٨١٥٩٤
٠.٥١	٠.٦٩٤٩٧	٠.٧١	٠.٧٦١١٥	٠.٩١	٠.٨١٨٥٩
٠.٥٢	٠.٦٩٨٤٧	٠.٧٢	٠.٧٦٤٢٤	٠.٩٢	٠.٨٢١٢١
٠.٥٣	٠.٧٠١٩٤	٠.٧٣	٠.٧٦٧٣٠	٠.٩٣	٠.٨٢٣٨١
٠.٥٤	٠.٧٠٥٤٠	٠.٧٤	٠.٧٧٠٣٥	٠.٩٤	٠.٨٢٦٢٩
٠.٥٥	٠.٧٠٨٨٤	٠.٧٥	٠.٧٧٣٣٧	٠.٩٥	٠.٨٢٨٩٤
٠.٥٦	٠.٧١٢٢٦	٠.٧٦	٠.٧٧٦٣٧	٠.٩٦	٠.٨٣١٤٧
٠.٥٧	٠.٧١٥٦٦	٠.٧٧	٠.٧٧٩٣٥	٠.٩٧	٠.٨٣٣٩٨
٠.٥٨	٠.٧١٩٠٤	٠.٧٨	٠.٧٨٢٣٠	٠.٩٨	٠.٨٣٦٤٦
٠.٥٩	٠.٧٢٢٤٠	٠.٧٩	٠.٧٨٥٢٤	٠.٩٩	٠.٨٣٨٩١
٠.٦٠	٠.٧٢٥٧٥	٠.٨٠	٠.٧٨٨١٤	١.٠٠	٠.٨٤١٣٤
٠.٦١	٠.٧٢٩٠٧	٠.٨١	٠.٧٩١٠٣	١.٠١	٠.٨٤٣٧٥
٠.٦٢	٠.٧٣٢٣٧	٠.٨٢	٠.٧٩٣٨٩	١.٠٢	٠.٨٤٦١٤
٠.٦٣	٠.٧٣٥٦٥	٠.٨٣	٠.٧٩٦٧٣	١.٠٣	٠.٨٤٨٥٠
٠.٦٤	٠.٧٣٨٩١	٠.٨٤	٠.٧٩٩٥٥	١.٠٤	٠.٨٥٠٨٣

تابع جدول رقم (١)
التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
١.٠٥	٠.٨٥٣١٤	١.٢٥	٠.٨٩٤٣٥	٠.١٥	٠.٩٢٦٤٧
١.٠٦	٠.٨٥٥٤٣	١.٢٦	٠.٨٩٦١٧	١.٤٦	٠.٩٢٧٨٦
١.٠٧	٠.٨٥٧٦٩	١.٢٧	٠.٨٩٧٩٦	١.٤٧	٠.٩٢٩٢٢
١.٠٨	٠.٨٥٩٩٣	١.٢٨	٠.٨٩٩٧٣	١.٤٨	٠.٩٣٠٥٦
١.٠٩	٠.٨٦٢١٤	١.٢٩	٠.٩٠١٤٧	١.٤٩	٠.٩٣١٨٩
١.١٠	٠.٨٦٤٣٣	١.٣٠	٠.٩٠٣٢٠	١.٥٠	٠.٩٣٣١٩
١.١١	٠.٨٦٦٥٠	١.٣١	٠.٩٠٤٩٠	١.٥١	٠.٩٣٤٤٨
١.١٢	٠.٨٦٨٦٤	١.٣٢	٠.٩٠٦٥٨	١.٥٢	٠.٩٣٥٧٤
١.١٣	٠.٨٧٠٧٦	١.٣٣	٠.٩٠٨٢٤	١.٥٣	٠.٩٣٦٩٩
١.١٤	٠.٨٧٢٨٦	١.٣٤	٠.٩٠٩٨٨	١.٥٤	٠.٩٣٨٢٢
١.١٥	٠.٨٧٤٩٣	١.٣٥	٠.٩١١٤٩	١.٥٥	٠.٩٣٩٤٣
١.١٦	٠.٨٧٦٩٨	١.٣٦	٠.٩١٣٠٩	٠.١٥٦	٠.٦٢٩٤٠
١.١٧	٠.٨٧٩٠٠	١.٣٧	٠.٩١٤٦٦	١.٥٧	٠.٩٤١٧٩
١.١٨	٠.٨٨١٠٠	١.٣٨	٠.٩١٦٢١	١.٥٨	٠.٩٤٢٩٥
١.١٩	٠.٨٨٢٩٨	١.٣٩	٠.٩١٧٧٤	١.٥٩	٠.٩٤٤٠٨
١.٢٠	٠.٨٨٤٩٣	١.٤٠	٠.٩١٩٢٤	١.٦٠	٠.٩٤٥٢٠
١.٢١	٠.٨٨٦٨٦	١.٤١	٠.٩٢٠٧٣	١.٦١	٠.٩٤٦٣٠
١.٢٢	٠.٨٨٨٧٧	١.٤٢	٠.٩٢٢٢٠	١.٦٢	٠.٩٤٧٣٨
١.٢٣	٠.٨٩٠٦٥	١.٤٣	٠.٩٢٣٦٤	١.٦٣	٠.٩٤٨٤٥
١.٢٤	٠.٨٩٢٥١	١.٤٤	٠.٩٢٥٠٧	١.٦٤	٠.٩٤٩٥٠

تابع جدول رقم (١)
التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
١.٦٥	٠.٩٥٠٥٣	١.٨٥	٠.٨٤٩٦٧	٢.٠٥	٠.٩٧٩٨٢
١.٦٦	٠.٩٥١٥٤	١.٨٦	٠.٩٦٨٥٦	٢.٠٦	٠.٩٨٠٣٠
١.٦٧	٠.٩٥٢٥٤	١.٨٧	٠.٩٦٩٢٦	٢.٠٧	٠.٩٨٠٧٧
١.٦٨	٠.٩٥٣٥٢	١.٨٨	٠.٩٦٩٩٥	٢.٠٨	٠.٩٨١٢٤
١.٦٩	٠.٩٥٤٤٩	١.٨٩	٠.٩٧٠٦٢	٢.٠٩	٠.٩٨١٦٩
١.٧٠	٠.٩٥٥٤٣	١.٩٠	٠.٩٧١٢٨	٢.١٠	٠.٩٨٢١٤
١.٧١	٠.٩٥٦٣٦	١.٩١	٠.٩٧١٩٣	٢.١١	٠.٩٨٢٥٧
١.٧٢	٠.٩٥٧٢٨	١.٩٢	٠.٩٧٢٥٧	٢.١٢	٠.٩٨٣٠٠
١.٧٣	٠.٩٥٨١٨	١.٩٣	٠.٩٧٣٢٠	٢.١٣	٠.٩٨٣١٤
١.٧٤	٠.٩٥٩٠٧	١.٩٤	٠.٩٧٣٨١	٢.١٤	٠.٩٨٣٨٢
١.٧٥	٠.٩٥٩٩٤	١.٩٥	٠.٩٧٤٤١	٢.١٥	٠.٩٨٤٢٢
١.٧٦	٠.٩٦٠٨٠	١.٩٦	٠.٩٧٥٠٠	٢.١٦	٠.٩٨٤٦١
١.٧٧	٠.٩٦١٦٤	١.٩٧	٠.٩٧٥٥٨	٢.١٧	٠.٩٨٥٠٠
١.٧٨	٠.٩٦٢٤٦	١.٩٨	٠.٩٧٦١٥	٢.١٨	٠.٩٨٥٣٧
١.٧٩	٠.٩٦٣٢٧	١.٩٩	٠.٩٧٦٧٠	٢.١٩	٠.٩٨٥٧٤
١.٨٠	٠.٩٦٤٠٧	٢.٠٠	٠.٩٧٧٢٥	٢.٢٠	٠.٩٨٦١٠
١.٨١	٠.٩٦٤٨٥	٢.٠١	٠.٩٧٧٧٥	٢.٢١	٠.٩٨٦٤٥
١.٨٢	٠.٩٦٥٦٢	٢.٠٢	٠.٩٧٨٣١	٢.٢٢	٠.٩٨٦٧٩
١.٨٣	٠.٩٦٦٣٨	٢.٠٣	٠.٩٧٨٨٢	٢.٢٣	٠.٩٨٧١٣
١.٨٤	٠.٩٦٧١٢	٢.٠٤	٠.٩٧٩٣٢	٢.٢٤	٠.٩٨٧٤٥

تابع جدول رقم (١)
التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
٢.٢٥	٠.٩٨٧٧٨	٢.٤٥	٠.٩٩٢٨٦	٢.٦٥	٠.٩٩٥٩٨
٢.٢٦	٠.٩٨٨٠٩	٢.٤٦	٠.٩٩٣٠٥	٢.٦٦	٠.٩٩٦٠٩
٢.٢٧	٠.٩٨٨٤٠	٢.٣٧	٠.٩٩٣٢٤	٢.٦٧	٠.٩٩٦٢١
٢.٢٨	٠.٩٨٨٧٠	٢.٣٨	٠.٩٩٣٤٣	٢.٦٨	٠.٩٩٦٣٢
٢.٢٩	٠.٩٨٨٩٩	٢.٤٩	٠.٩٩٣٦١	٢.٦٩	٠.٩٩٦٤٣
٢.٣٠	٠.٩٨٩٢٨	٢.٥٠	٠.٩٩٣٧٩	٢.٧٠	٠.٩٩٦٥٣
٢.٣١	٠.٩٨٩٥٦	٢.٥١	٠.٩٩٣٩٦	٢.٧١	٠.٩٩٦٦٤
٢.٣٢	٠.٩٨٩٨٣	٢.٥٢	٠.٩٩٤١٣	٢.٧٢	٠.٩٩٦٧٤
٢.٣٣	٠.٩٩٠١٠	٢.٥٣	٠.٩٩٤٣٠	٢.٧٣	٠.٩٩٦٨٣
٢.٣٤	٠.٩٩٠٣٦	٠.٢٥٤	٠.٩٩٤٤٦	٢.٧٤	٠.٩٩٦٩٣
٢.٣٥	٠.٩٩٠٦١	٢.٥٥	٠.٩٩٤٦١	٢.٧٥	٠.٩٩٧٠٢
٢.٣٦	٠.٩٩٠٨٦	٢.٥٦	٠.٩٩٤٧٧	٢.٧٦	٠.٩٩٧١١
٢.٣٧	٠.٩٩١١١	٢.٥٧	٠.٩٩٤٩٢	٢.٧٧	٠.٩٩٧٢٠
٢.٣٨	٠.٩٩١٣٤	٢.٥٨	٠.٩٩٥٠٦	٢.٧٨	٠.٩٩٧٢٨
٢.٣٩	٠.٩٩١٥٨	٢.٥٩	٠.٩٩٥٢٠	٢.٧٩	٠.٩٩٧٣٦
٢.٤٠	٠.٩٩١٨٠	٢.٦٠	٠.٩٩٥٣٤	٢.٨٠	٠.٩٩٧٤٤
٢.٤١	٠.٩٩٢٠٢	٢.٦١	٠.٩٩٥٤٧	٢.٨١	٠.٩٩٧٥٢
٢.٤٢	٠.٩٩٢٢٤	٢.٦٢	٠.٩٩٥٦٠	٢.٨٢	٠.٩٩٧٦٠
٢.٤٣	٠.٩٩٢٤٥	٢.٦٣	٠.٩٩٥٧٣	٢.٨٣	٠.٩٩٧٦٧
٢.٤٤	٠.٩٩٢٦٦	٢.٦٤	٠.٩٩٥٨٥	٢.٨٤	٠.٩٩٧٧٤

تابع جدول رقم (١)
التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
٢.٨٥	٠.٩٩٧٨١	٣.٠٥	٠.٩٩٨٨٦	٣.٢٥	٠.٩٩٩٤٢
٢.٨٦	٠.٩٩٧٨٨	٣.٠٦	٠.٩٩٨٨٩	٣.٢٦	٠.٩٩٩٤٤
٢.٨٧	٠.٩٩٧٩٥	٣.٠٧	٠.٩٩٨٩٣	٣.٢٧	٠.٩٩٩٤٦
٢.٨٨	٠.٩٩٨٠١	٣.٠٨	٠.٩٩٨٩٧	٣.٢٨	٠.٩٩٩٤٨
٢.٨٩	٠.٩٩٨٠٧	٣.٠٩	٠.٩٩٩٠٠	٣.٢٩	٠.٩٩٩٥٠
٢.٩٠	٠.٩٩٨١٣	٣.١٩	٠.٩٩٩٠٣	٣.٣٠	٠.٩٩٩٥٢
٢.٩١	٠.٩٩٨١٩	٣.١١	٠.٩٩٩٠٦	٣.٣١	٠.٩٩٩٥٣
٢.٩٢	٠.٩٩٨٢٥	٣.١٢	٠.٩٩٩١٠	٣.٣٢	٠.٩٩٩٥٥
٢.٩٣	٠.٩٩٨٣١	٣.١٣	٠.٩٩٩١٣	٢.٣٣	٠.٩٩٩٥٧
٢.٩٤	٠.٩٩٨٣٦	٣.١٤	٠.٩٩٩١٦	٣.٣٤	٠.٩٩٩٥٨
٢.٩٥	٠.٩٩٨٤١	٣.١٥	٠.٩٩٩١٨	٣.٣٥	٠.٩٩٩٦٠
٢.٩٦	٠.٩٩٨٤٦	٣.١٦	٠.٩٩٩٢١	٣.٣٦	٠.٩٩٩٦١
٢.٩٧	٠.٩٩٨٥١	٣.١٧	٠.٩٩٩٢٤	٣.٣٧	٠.٩٩٩٦٢
٢.٩٨	٠.٩٩٨٥٦	٣.١٨	٠.٩٩٩٢٦	٣.٣٨	٠.٩٩٩٦٤
٢.٩٩	٠.٩٩٨٦١	٣.١٩	٠.٩٩٩٢٩	٣.٣٩	٠.٩٩٩٦٥
٣.٠٠	٠.٩٩٨٦٥	٣.٢٠	٠.٩٩٩٣١	٣.٤٠	٠.٩٩٩٦٦
٣.٠١	٠.٩٩٨٦٩	٣.٢١	٠.٩٩٩٣٤	٣.٤١	٠.٩٩٩٦٨
٣.٠٢	٠.٩٩٨٧٤	٣.٢٢	٠.٩٩٩٣٦	٣.٤٢	٠.٩٩٩٦٩
٣.٠٣	٠.٩٩٨٧٨	٣.٢٣	٠.٩٩٩٣٨	٣.٤٣	٠.٩٩٩٧٠
٣.٠٤	٠.٩٩٨٢	٣.٢٤	٠.٩٩٩٤٠	٣.٤٤	٠.٩٩٩٧١

تابع جدول رقم (١)
التوزيع الطبيعى المعيارى

ى	ح(ى)	ى	ح(ى)	ى	ح(ى)
٣.٤٥	٠.٩٩٩٧٢	٣.٦٥	٠.٩٩٩٨٧	٣.٨٥	٠.٩٩٩٩٤
٣.٤٦	٠.٩٩٩٧٣	٣.٦٦	٠.٩٩٩٨٧	٣.٨٦	٠.٩٩٩٩٤
٣.٤٧	٠.٩٩٩٧٤	٣.٦٧	٠.٩٩٩٨٨	٣.٨٧	٠.٩٩٩٩٥
٣.٤٨	٠.٩٩٩٧٥	٣.٦٨	٠.٩٩٩٨٨	٣.٨٨	٠.٩٩٩٩٥
٣.٤٩	٠.٩٩٩٧٦	٣.٦٩	٠.٩٩٩٨٩	٣.٨٩	٠.٩٩٩٩٥
٣.٥٠	٠.٩٩٩٧٧	٣.٧٠	٠.٩٩٩٨٩	٣.٩٠	٠.٩٩٩٩٥
٣.٥١	٠.٩٩٩٧٨	٣.٧١	٠.٩٩٩٩٠	٣.٩١	٠.٩٩٩٩٥
٣.٥٢	٠.٩٩٩٧٨	٣.٧٢	٠.٩٩٩٩٠	٣.٩٢	٠.٩٩٩٩٦
٣.٥٣	٠.٩٩٩٧٩	٣.٧٣	٠.٩٩٩٩٠	٣.٩٣	٠.٩٩٩٩٦
٣.٥٤	٠.٩٩٩٨٠	٣.٧٤	٠.٩٩٩٩١	٣.٩٤	٠.٩٩٩٩٦
٣.٥٥	٠.٩٩٩٨١	٣.٧٥	٠.٩٩٩٩١	٣.٩٥	٠.٩٩٩٩٦
٣.٥٦	٠.٩٩٩٨١	٣.٧٦	٠.٩٩٩٩٢	٣.٩٦	٠.٩٩٩٩٦
٣.٥٧	٠.٩٩٩٨٢	٣.٧٧	٠.٩٩٩٩٢	٣.٩٧	٠.٩٩٩٩٦
٣.٥٨	٠.٩٩٩٨٣	٣.٧٨	٠.٩٩٩٩٢	٣.٩٨	٠.٩٩٩٩٧
٣.٥٩	٠.٩٩٩٨٣	٣.٧٩	٠.٩٩٩٩٢	٣.٩٩	٠.٩٩٩٩٧
٣.٦٠	٠.٩٩٩٨٤	٣.٨٠	٠.٩٩٩٩٣	٤.٠٠	٠.٩٩٩٩٧
٣.٦١	٠.٩٩٩٨٥	٣.٨١	٠.٩٩٩٩٣		
٣.٦٢	٠.٩٩٩٨٥	٣.٨٢	٠.٩٩٩٩٣		
٣.٦٣	٠.٩٩٩٨٦	٣.٨٣	٠.٩٩٩٩٤		
٣.٦٤	٠.٩٩٩٨٦	٣.٨٤	٠.٩٩٩٩٤		

جدول رقم (٢)

توزيع t-Distribution

∝ / د	٠.٠٠٥	٠.٠١	٠.٠٢٥	٠.٠٥	٠.١٠
١	٦٣.٦٥٧	٣١.٨٢١	١٢.٧٠٦	٦.٣١٤	٣.٠٧٨
٢	٩.٩٢٥	٦.٩٦٥	٤.٣٠٣	٢.٩٢٠	١.٨٨٦
٣	٥.٨٤١	٤.٥٤١	٣.١٨٢	٢.٣٥٣	١.٦٣٨
٤	٤.٦٠٤	٣.٧٤٧	٢.٧٧٦	٢.١٣٢	١.٥٣٣
٥	٤.٠٣٢	٣.٣٦٥	٢.٥٧١	٢.٠١٥	١.٤٧٦
٦	٣.٧٠٧	٢.١٤٣	٢.٤٤٧	١.٩٤٣	١.٤٤٠
٧	٣.٤٩٩	٢.٩٩٨	٢.٣٦٥	١.٨٩٥	١.٤١٥
٨	٣.٣٥٥	٢.٨٩٦	٢.٣٠٦	١.٨٦٠	١.٣٩٧
٩	٣.٢٥٠	٢.٨٢١	٢.٢٦٢	١.٨٣٣	١.٣٨٣
١٠	٣.١٦٩	٢.٧٦٤	٢.٢٢٨	١.٨١٢	١.٣٧١
١١	٣.١٠٦	٣.٧١٨	٢.٢٠١	١.٧٩٦	١.٣٦٣
١٢	٣.٠٥٥	٢.٦٨١	٢.١٧٩	١.٧٨٢	١.٣٥٦
١٣	٣.٠١٢	٢.٦٥٠	٢.١٦٠	١.٧٧١	١.٣٥٠
١٤	٢.٩٧٧	٢.٦٢٤	٢.١٤٥	١.٧٦١	١.٣٤٥
١٥	٢.٩١٧	٢.٦٠٢	٢.١٣١	١.٧٥٣	١.٣٤١
١٦	٢.٩٧١	٢.٥٨٣	٢.١٢٠	١.٧٤٦	١.٣٣٧
١٧	٢.٩٨٩	٢.٥٦٧	٢.١١٠	١.٧٤٠	١.٣٣٣
١٨	٢.٨٧٨	٢.٥٥٢	٢.١	٢.٧٣٤	١.٣٣٠
١٩	٢.٨٦١	٢.٥٣٩	٢.٠٩٣	١.٧٢٩	١.٣٢٨
٢٠	٢.٨٤٥	٢.٥٣٨	٢.٠٨٦	١.٧٢٥	١.٣٢٥
٢١	٢.٨٣١	٢.٥١٨	٢.٠٨٠	١.٧٢١	١.٣٢٣
٢٢	٢.٨١٩	٢.٥٠٨	٢.٠٧٤	١.٧١٧	١.٣٢١
٢٣	٢.٨٠٧	٢.٥٠٠	٢.٠٦٩	١.٧١٤	١.٣١٩
٢٤	٢.٧٩٧	٢.٤٩٢	٢.٠٦٤	١.٧١١	١.٣١٨
٢٥	٢.٧٨٧	٢.٤٨٥	٢.٠٦٠	١.٧٠٨	١.٣١٦
٢٦	٢.٧٧٩	٢.٤٧٩	٢.٠٥٦	١.٧٠٦	١.٣١٥
٢٧	٢.٧٧١	٢.٤٧٣	٢.٠٥٢	١.٧٠٣	١.٤١٤
٢٨	٢.٧٦٣	٢.٤٦٧	٢.٠٤٨	١.٧٠١	١.٣١٣
٢٩	٢.٧٥٦	٢.٤٦٢	٢.٠٤٥	١.٦٩٩	١.٣١١
٣٠	٢.٧٥٠	٢.٤٥٧	٢.٠٤٢	١.٦٨٧	١.٣١٠
٤٠	٢.٧٠٤	٢.٤٢٣	٢.٠٢١	١.٦٨٤	١.٣٠٣
٦٠	٢.٦٦٠	٢.٣٩٠	٢.٠٠٠	١.٦٧١	١.٢٩٦
١٢٠	٢.٦١٧	٢.٣٥٨	١.٩٨٠	١.٦٥٨	١.٢٨٩
∞	٢.٥٨٠	٢.٣٣٠	١.٩٦٠	١.٦٤٥	١.٢٨٢

الفهــرس